

# **Egyenáramú elektromos mérések modellezése inhomogén közegekben**

**Doktori értekezés**

**Balázs László**

Doktori iskola vezetője:  
**Prof. Monostori Miklós**

Programvezető:  
**Prof. Monostori Miklós**

Témavezető:  
**Dr. Drahos Dezső**

**Földtudományi Doktori Iskola  
Földtan-Geofizika Program**

**Budapest  
2009**

## Tartalom

Bevezetés.....	3
1. Elektromos mérésekkel kapcsolatos problémák .....	4
2. Irodalmi áttekintés.....	6
3. A feladat általános megfogalmazása.....	8
3.1. Direkt feladat.....	8
3.1.1. Határfeltételek .....	9
3.2. Inverz feladat.....	10
4. Kiterjedt elektródák modellezése .....	12
4.1. A feladat megfogalmazása .....	12
4.2. Elektróda modell .....	12
4.3. A Green-függvény meghatározása .....	14
4.4. Felületi áramsűrűség becslése – egy árambocsátó elektród esete .....	16
4.4.1. A probléma megoldása, ha az elektród árama ismert.....	16
4.4.2. A probléma megoldása, ha az elektród potenciálja ismert.....	17
4.4.3. Eredmények.....	17
4.4.4. Felületi áramsűrűség becslés Fourier-sorfejtéssel.....	21
4.4.5. Árameloszlás becslése sorfejtéssel.....	23
4.5. A penetrációs elektromos szonda modellezése .....	24
4.6. Dual-laterolog modellezése.....	27
4.7. Konklúzió .....	33
5. Direktfeladat megoldás változó radiális fajlagos ellenállás profil esetén .....	35
5.1. Az előasztás folyamatának modellezése .....	35
5.2. Direktfeladat megoldás az ellenállás radiális változása esetében .....	36
5.3. Az együtthatókra vonatkozó differenciálegyenlet rendszer megoldásának lehetőségei .....	44
5.3.1. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása Euler-módszerrel .....	44
5.3.2. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása az együttható mátrix közvetlen integrálásával.....	45
5.3.3. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása a probléma transzformálásával .....	46
5.3.4. Improprius integrálok numerikus kiértékelése.....	52
5.4. Lyukhatás figyelembe vétele a direktfeladat megoldásban.....	52
5.4. Direktfeladat megoldások eredményei.....	54
5.5. Inverzió.....	62
5.6. Konklúzió.....	72
6. Vertikális inhomogenitások hatása.....	73
6.1. Konklúzió .....	81
7. Véletlen inhomogenitások hatása.....	82
7.1. Kis kiterjedésű perturbáció.....	83
7.2. Több lokalizált perturbációs centrum esete.....	85
7.3. Példák a rekurziós perturbációs eljárásra.....	86
7.3.1. Homogén $x$ - irányú elektromos erőterbe helyezett rács .....	86
7.3.2. Centrális erőterbe helyezett rácsszerű perturbáció.....	87
7.3.3. Perturbált tér véletlen közegben.....	89
Összefoglalás .....	92
Summary .....	93
A dolgozatban használt jelölések: .....	94
IRODALOMJEGYZÉK.....	95
Köszönetnyilvánítás .....	98
I. Függelék:.....	99
II. Függelék. ....	102

## Bevezetés

A dolgozatban a mélyfúrási geofizika egyenáramú méréseivel kapcsolatos néhány aktuális problémával foglalkozom, amelyek a mérés modellezésének pontosításához kötődnek. Megoldásukkal javítható a direktfeladat megoldás és ezen keresztül az ellenállás paraméterekre vonatkozó inverzió pontossága.

Az elektromos karotázmérésekből származó látszólagos fajlagos ( $R_a$ ) ellenállások alapján határozható meg az egyik leglényegesebb közetfizikai paraméter: a harántolt közettest fajlagos ellenállása ( $R_t$ ). A fajlagos ellenállás kulcsparaméter pl. a közetek szénhidrogéntartalmának becslésénél, de a nyersanyag kutatás minden területén lényeges szerepet játszik. Kiemeli az elektromos mérések fontosságát, hogy a kutatási mélységük általában a legnagyobb (akár 1-2 m is lehet az ellenálláskontraszt és elektróda elrendezés függvényében), így a fúrás által nem bolygatott érintetlen zónáról is hozhatnak információt. Ugyanakkor a nagyobb kutatási mélység következménye, hogy az ellenállásmérések jelentősen befolyásolják a fúrólyuk és lyukkörnyezet (elárasztás) okozta inhomogenitások. Az ehhez kapcsolódó korrekciók (lyukhatás-korrekció, elárasztás-korrekció) elvégzésének kialakult gyakorlata van, mely gyakran túlságosan leegyszerűsített szonda és közegmodellre épül, pedig a korrekciók gyakran jelentősen módosítják a nyers mérési eredményeket.

Az utóbbi években előtérbe került a régebben termelő szénhidrogén tárolók újbóli vizsgálata, ahol a következtetéseket az akkoriban végrehajtott mérések alapján kell levonni. A 60-as 70-es években használt, nem fókuszált elektromos eszközök esetében (potenciál és gradiens szondák) az elárasztás hatása sokkal jelentősebb, így az eredmények pontosításához célszerű a korrekciók elvégzése javított modellek alapján.

A túlzott egyszerűsítésekből származó szisztematikus hibák a hibaterjedés következtében megjelennek a korrigált fajlagos ellenállás értékekben ( $R_t$ ) és az ebből számított közetparaméterekben (pl.  $S_w$ ) valamint az erre épülő készletszámításokban.

A pontosabb interpretáció a direktfeladat megoldások esetében realizisztikusabb szonda- és közetmodellt igényel. A pontosított modellel végzett elméleti modellezés egyúttal segítheti a szondák tervezését is.

A dolgozatban célként tűztem ki, hogy javított forrásmodellel (kiterjedt, véges méretű elektródák) és a valósághoz közelebb álló közegmodellek (pl. folytonos függvénnyel leírható radiális ellenállás profil) segítségével végzem el az elektromos eszközök direktfeladat-megoldását. Az ebből származó eredmények alapján pontosítható az ellenállás paraméterekre vonatkozó inverzió is.

A felmerülő problémák esetében törekedtem az analitikus, fél-analitikus megoldásokra, melyek érthetőbbé és áttekinthetőbbé teszik a szondák viselkedését.

A realisabb modellezés – műszer oldalról – lehetővé teszi a nem ideális áramkörökből felépített mérőeszköz vizsgálatát is (pl. nem ideális áramgenerátor forrás kezelése).

## 1. Elektromos mérésekkel kapcsolatos problémák

Az ellenállásslévények korrekcióinak és ezzel összefüggésben interpretációjának javítása megköveteli a szonda és a közegmodellek javítását.

Ami a forrásmodellről illeti, a makroszondák modellezésénél gyakran alkalmazott pont- illetve vonal elektródákkal modellezett elektródák esetében szinguláris elektródapotenenciál alakul ki, így nem alkalmasak a felületi árameloszlás meghatározására, illetve az elektródáknál fellépő átmeneti (földelési) ellenállás számítására. Kiterjedt elektródákból felépülő, szabályozott áramterű eszközök (laterologok) esetében a szabályzás módja is jelentősen függ a terelő elektródákon kialakult árameloszlástól. A különböző fajlagos ellenállású közegeknél nemcsak az elektródák áramarányai változnak a mért közeg fajlagos ellenállás eloszlásától függően, hanem az elektródákon fellépő felületi árameloszlás is.

A sekély mérnökgeofizikai feladatoknál alkalmazott penetrációs elektromos mérések esetében elárasztás nem alakul ki, viszont a csúcs és a rudazat, mint az elektródákhoz közeli kis ellenállású inhomogenitások jelentősen torzíthatják az áramteret. Ennek a hatásnak a vizsgálata elengedhetetlen az eredmények értelmezésénél.

Végeselem-módszerrel, a jelenlegi számítógépes háttér mellett a karotázs elektromos problémái általában megoldhatók és valóban nagyon hatékony eszközei a direktfeladat-megoldásnak. A szabályozott áramterű eszközök esetében a visszacsatolások nagyon megnehezítik az ilyen típusú számításokat, a peremfeltételek beállítását, így végeselem-módszerek alkalmazásakor gyakran csak iteratív megoldás lehetséges. További probléma, hogy a potenciáltér diszkretizálását meghatározó hálóról az eredmény spektrális tulajdonságainak ismerete nélkül nem lehet pontosan eldönteni, hogy a mintavételezés megfelelő-e, sérül-e a Shannon-kritérium. Ezenfelül a végeselem-módszer véges intervallumon használható, melynek definiálása általában próbaszámításokat igényel. Az analitikus formában származtatott eredmények segítségével ezek a problémák jórészt elkerülhetők, emiatt ahol lehetséges analitikus formában felírt eredmények megadására törekedtem. Az analitikus formában származtatott eredmény a probléma diszkutálására is alkalmasabb.

Az elektromos szelvények korrekciójánál, az elárasztásból adódó radiális fajlagos ellenállás változást általában ekvivalens lépcsőfüggvénnyel modellezzük. A valóságban (laborvizsgálatok tapasztalatai alapján) diffúziós folyamatból származó exponenciális jellegű profillal kell számolni. A valóságoshoz lényegesen közelebb álló, néhány paraméterrel jellemezhető folytonos profilra hasonló inverzió dolgozható ki, mint a lépcsőfüggvény modellre, így pontosabbá válhat az  $Rt$  becslés, és pontosabb értelmet nyer az elárasztás paraméterek szórása is. Ehhez a folytonos profilnál kialakuló potenciáltér számítására alkalmas számítási eljárás kellett kidolgozni.

Ennek lényege, hogy a homogén radiális zónákra Bessel-Fourier transzformált formában felírt általános megoldásban szereplő spektrális együttható-függvényekre állítottam elő differenciálegyenlet-rendszert. A differenciálegyenlet-rendszer az infinitezimális radiális zónákra bontott közeg zónahatároknál kiroható határfeltételeiből származtatható. A radiális profil számításánál ismertetett megoldási módot alkalmaztam vertikális átmeneti réteg esetére is, azaz a Hankel-transzformált alakban felírt általános megoldás együttható függvényeire írtam fel differenciálegyenlet-rendszert.

Az elektromos mérések modellezésénél (elsősorban a hibamodellnél) további probléma lehet a közeg véletlen inhomogenitásának hatása, mely lényegesebb hibaforrás, mint a mérési hiba. Ezek tanulmányozására iteratív perturbációs módszert alkalmaztam véletlen közegekre vonatkozó potenciáltér számításokra.

## 2. Irodalmi áttekintés

Az elektromos karotázsmérésekhez kötődő direktfeladat-megoldásokkal kapcsolatban évről évre jelennek meg elméleti cikkek. A mérés fontossága miatt, a direktfeladat-megoldás területén folyó kutatás folyamatos. Ebben a fejezetben a fontosabb publikációkat foglalom össze, melyek részben kiindulópontot jelentettek a dolgozatban található számítási eljárásokhoz is.

Az egyenáramú eszközök potenciálterének számítására alkalmas hengersizmetrikus analitikus megoldások, illetve rétegzett közegben kialakuló potenciáltér számítások Dakhnov munkáiban, alapvető jelentőségű összefoglaló művében szerepelnek [Dakhnov 1967]. Könyvében megtalálható a Laplace-egyenlet hengerkoordinátákban felírt általános megoldása is, mely tulajdonképpen Fourier-módszerrel kapható Bessel-Fourier transzformált. A hengersizmetrikus közegre vonatkozó megoldások és erre vonatkozó alkalmazások más, összefoglaló jellegű elektrodinamika könyvben is megjelennek [Jackson 2004; Simonyi 1960]. A Bessel-függvényekkel és módosított Bessel-függvényekkel kapcsolatos összefüggések Abramowitz és Stegun alapművében találhatók nagy részletességgel. [Abramowitz 1965]

Tartományonként homogén zónákra (elárasztás és beágyazó réteg együttes hatása) vonatkozó integráltranszformáción alapuló általános megoldás Gianzero és Anderson alapvető cikkében található. [Gianzero 1982]

Direktfeladat megoldásoknál jól használható realiztikusabb kiterjedt elektróda modell első megfogalmazása de-Witte-től származik [de-Witte 1959]. A cikkben homogén térre vonatkozóan meghatározza a gyűrű elektród, illetve az egyenletes árameloszlású elektród Fourier-Bessel egyűthető függvényeit. Ez a modell továbbfejlesztve alkalmas a kiterjedt elektróda modell felépítésére, amennyiben az árameloszlást az elektróda rendszerre kírható szabályzási és peremfeltételekkel meghatározzuk. Megjegyezzük, hogy a kiterjedt elektródák modellezésére Dakhnov ellipszoidot javasol [Dakhnov 1967], ennek elektrosztatikai analógiája megtalálható Simonyi K. könyvében is [Simonyi 1960].

A kiterjedt terelő elektródákkal működő dual-laterologok modellezésével napjainkban leggyakrabban véges differencia [Davydycheva 2003; Wang 2004] és különböző típusú végelem módszerrel végzik. [Lovell 1993; Yang 2007; Nam 2004; Cozzolino 2007]

Dakhnov és deWitte eredményeiből kiindulva készült el a dual-laterologok [Balázs 1987] kiértékelő diagramjai, valamint a penetrációs szonda modellezésének eredményeit összefoglaló cikk [Balázs 2005].

A radiális profil kezelésének egyik lehetséges megoldásával Drahos D. cikke foglalkozik [Drahos 1984]. Ebben a szerző rekurzív megoldást épít fel pont elektród modellel, radiálisan homogén tartományok sorozatára osztható közegben.

Ugyancsak a radiális profilhoz kapcsolódóan Roy és Dutta cikkében az inhomogén elárasztott zónára felírt differenciálegyenletet Frobenius-módszerrel meghatározott polinommal közelíti, [Roy 1994], míg a perturbáció-számítás első rendjében felírt megoldást található Balázs L. cikkében [Balázs 2007], mely Drahos cikkében leírt megoldás továbbfejlesztésének tekinthető.

Az elárasztás profil kísérleti és elméleti vizsgálatáról [Jiao 1992] cikke nyújt összefoglalót, mely megerősíti a profil leírására használt modellek – exponenciális és lineáris függvényekkel közelített fajlagos ellenállás profil - jogosságát.

A függőleges rétegzettség mellett kialakuló potenciáltér számításával kapcsolatos rekurzív eljárást ismerteti alapcikkében Daniels [1978].

Az inhomogén közegek viselkedése napjaink egyik fontos kutatási területe számtalan kapcsolódó publikációval.

Az inhomogén közegekben kialakuló elektromos tér leírására különböző közelítő módszereket alkalmaznak ez egyes szerzők. A laboratóriumi méréseken alapuló modellezés (Archie) mellett a perturbáció számítás különböző rendjében, átlagolt térjellemzőkkel való közelítést használnak fel [Landau 1986]. Más szerzők variációs elvek alapján származtatott átlagtér segítségével határoznak meg átlagos tulajdonságokat inhomogén közegekre [Alliari 2003; Hashin 1962].

### 3. A feladat általános megfogalmazása

#### 3.1. Direkt feladat

A számítások során a mélyfúrási geofizikában használatos szondák körül kialakuló fizikai terek térjellemzőinek eloszlása valamilyen differenciál-operátorral (Laplace-operátor, transzport-operátor stb.) felírt parciális differenciálegyenlet megoldásaiként állíthatók elő. Az operátor – együttható függvények formájában – magába foglalhatja a mért közeg közetfizikai jellemzőit ( $\mathbf{p}$ ). Az egyenáramú elektromos probléma esetében fajlagos ellenállás szempontjából homogén térrészekre a Laplace-operátorral írható fel egyenlet a potenciál ( $U$ ) eloszlására ( $J$ ) térfogati áramsűrűség, mint forrás körül:

$$\Delta U(r, z, \varphi) = J(r, z, \varphi). \quad (3.1.)$$

Az inhomogén tagban szereplő áramforrást gyakran, mint az áramsűrűsége vonatkozó peremfeltételt építjük be a modellbe (Neumann-peremfeltétel). A hagyományos modellezésnél gyakran pontforrás – szinguláris potenciál értékkel – szerepel idealizált forrásként. Ez sok esetben jó közelítésnek tekinthető. Ekkor nincs a közegnek visszahatása az áramforrásra.

Az egyenáramú szondákra vonatkozó direktfeladat megoldásánál a modellparaméterek a fajlagos ellenállás térbeli eloszlásával kapcsolatosak (elárasztás paraméterei és  $Rt$ ). A számítások megkönnyítésére, hagyományos közegmodellek homogén közegekrészekből állnak.

A modellparaméterekkel jellemezhető térben kialakuló potenciál-eloszlásból, a mérési eredményekkel összevethető látszólagos fajlagos ellenállás értékeket származtatunk. A látszólagos értékek a modelltér és a homogén tér ekvivalenciája alapján megállapított effektív értékek ( $Ra$ ), melyek a térjellemzők peremértékeinek mintavételezett értékiből származnak.

A direktfeladat megoldás összetett áramforrás esetén (inhomogén probléma) célszerűen az operátor Green-függvényével –  $G(r, z, \varphi)$  – írható fel. A Green-függvény definíciója hengerkoordinátákban (origóban elhelyezett pontforrás esetében):

$$\Delta G(r, z, \varphi) = \delta(r, z, \varphi). \quad (3.2.)$$

A szondatesten elhelyezkedő források esetében a potenciál a forrástól távolodva a Green-függvényhez tart, amely a reális megoldások végtelenben való lecsengéséből következik. A megoldás adott közeg mellett, a probléma linearitásából következően, kiterjedt illetve összetett elektródrendszerrel a Green-függvénnyel – konvolúció segítségével – írható fel:

$$U(r, z) = J_f(z, r) * G(z, r). \quad (3.3.)$$

A 3.3. egyenletben felírt összefüggés  $\varphi$  szerint szimmetrikus esetekben érvényes, mely a makroszondák mérési modelljeinél általában teljesül. A Laplace-egyenlet – a problémához illeszkedő – hengerkoordinátákban felírt formájában, homogén fajlagos ellenállású tartományra a potenciált szorzat alakban keresve (Fourier-módszer) a következő általános megoldást kapjuk ( $\varphi$  szerint szimmetrikus esetben):



$$U(r, z, \varphi) = \int_0^{\infty} [A(m)K_0(mr) + B(m)I_0(mr)] [C(m)\cos mz + D(m)\sin mz] dm \quad (3.4.a.)$$

illetve

$$U(r, z, \varphi) = \int_0^{\infty} [A(m)J_0(mr) + B(m)N_0(mr)] [C(m)\cos mz + D(m)\sin mz] dm, \quad (3.4.b.)$$

attól függően, hogyan választjuk meg az integrálási változót ( $m$ ), mely térfrekvenciaként értelmezhető. A Fourier-módszer alkalmazásával az  $r$ -től függő tényezőre Bessel-egyenletet kapunk, míg a  $z$ -től függő tényezőre harmonikus megoldást szolgáltató egyenletet.

Megjegyezzük, hogy ha  $\varphi$  szög szerint sem izotróp a probléma, akkor az ettől függő tényező is harmonikus függvény és egy másik integrálási állandóval ( $n$ ) illeszthető az általános megoldásba:

$$U(r, z, \varphi) = \sum_n \int_0^{\infty} [A_{m,n}K_n(mr) + B_{m,n}I_n(mr)] \cos(mz) \cos n\varphi dm. \quad (3.4.c.)$$

Csak radiális változások esetére  $\varphi$ -ben szimmetrikus megoldások az alábbi formában keresendők a  $z_0$ -ban elhelyezett forrás körül:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [A(m)K_0(mr) + B(m)I_0(mr)] \cos m(z - z_0) dm. \quad (3.5.)$$

Látható, hogy az  $r$ -től függő rész a potenciálfüggvény spektruma. Vertikális inhomogenitások esetén a következő formában fejezhetjük ki az általános megoldást:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [A(m)\exp(-mz) + B(m)\exp(mz)] J_0(mr) dm. \quad (3.6.)$$

A 3.6. összefüggésben Hankel-transzformált formában áll elő a megoldás  $J_0$  bázison és itt a  $z$ -től függő tag a spektrum.

### 3.1.1. Határfeltételek

Az előző pontban 3.5. és 3.6. egyenletekben szereplő együttható függvényeket a feladathoz csatlakozó határfeltételekből lehet meghatározni. A határokon a potenciál folytonosan megy át, illetve folytonos az áramsűrűség normális komponense. A tartományonként homogén zónák esetében az ellenállás paraméterek éppen a határfeltételi egyenletekkel kerülnek be a megoldás spektrumába.

Ahogy említettem, a  $z$ -tengely mentén elhelyezkedő forrás-régió (elektrodák) is határfeltételként vehetők figyelembe [de-Witte 1959]. Az ideális vezetőnek tekintett elektrodák esetében csak radiális áramsűrűséggel kell számolni. Homogén térben ez az egyetlen határfeltétel. Természetesen a potenciál végtelenben való eltűnését minden esetben biztosítani kell.

### 3.2. Inverz feladat

Az inverzió során a paramétertér felett értelmezett direktfeladat megoldások vektorát és mért eredmények (látszólagos fajlagos ellenállások) vektorának eltérését tartalmazó funkcionál ( $Q$ ) minimum helye alapján határozzuk meg az eredményként szolgáló közegparamétereket (3.7.). A funkcionál származtatása az elméleti és mért látszólagos fajlagos ellenállások eltéréseire vonatkozó eloszlásfüggvény feltételezésével, leggyakrabban a maximum likelihood-elv alapján történik, mely Gauss-zaj (hibamodell) estében a súlyozott legkisebb-négyzetek módszerére vezet.

$$Q(\mathbf{p}) = \sum_i w_i (Ra_i - Ra_i^t(z, Rt, Ri, D, d))^2 = \min \quad (3.7.)$$

A  $w_i$  súlyok a mérések szórásnégyzeteivel fordítottan arányosak.

Az inverzió eredménye – adott modelltér mellett - a minimumhoz tartozó direktfeladat-megoldásokhoz tartozó modell paraméterek. Leggyakrabban:

- az elárasztás átmérője ( $D$ )
- az elárasztás ekvivalens fajlagos ellenállása ( $R_i$ )
- az érintetlen zóna fajlagos ellenállása ( $R_t$ )

Az inverzió során a paraméterek kovariancia mátrixát is meghatározzuk, ennek segítségével a paraméterek mindegyikére konfidencia intervallum konstruálható. A becslt paraméterek kovariancia mátrixa ( $\mathbf{C}$ ) felírható az alábbi formában [Szatmáry 2002]:

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{R}^{-1}, \quad (3.8.a.)$$

ahol  $\mathbf{R}$  mátrix a paraméterek szerinti derivált mátrixból és a  $w_i$  súlyok többnyire diagonális mátrixából származtatható:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}. \quad (3.8.b)$$

Ahol:

$\mathbf{F}$ : A számított mérési eredmények derivált mátrixa:

$$F_{ik} = \sum_j \frac{\partial Ra_i(z_j, \mathbf{p})}{\partial p_k} \quad (3.9.)$$

$\mathbf{W}$ : A mérések súlymátrixa (általában diagonális, átlójában a mérések szórásnégyzetével fordítottan arányos súlyokkal)

Gauss-zaj feltételezésével  $Q$  funkcionál a minimális értéknél arányos egy  $\chi^2$  eloszlású változóval [Szatmáry, 2002]. Az arányossági tényező ( $\sigma^2$ ), mely a mérések szórásnégyzeteiből származtatott súlyokat ( $w$ ) normálja, a  $Q$  minimumhoz tartozó értékből becsülhető:

$$\sigma^2 = \frac{Q_{\min}}{n - m}, \quad (3.10.)$$

ahol  $n$ : a mérések száma,

$m$ : a paraméterek száma.

Az inverzió fent ismertetett szokásos formája nem alkalmas a modellhibák kezelésére. Ezek gyakran nehezen becsülhető szisztematikus eltéréseket okoznak, torzítva a feltételezett eloszlást. Az inverzió hatékonysága javítható a modellhibák csökkentésével.

$$Q(\mathbf{p}) = \sum_i w_i \left( Ra_i - Ra'(\mathbf{p}_1, z_i) + Ra_i'(\mathbf{p}_2, z_i) - Ra_i'(\mathbf{p}_2, z_i) \right)^2 = \min . \quad (3.11.a)$$

A  $\mathbf{p}_2$  paramétervektor legyen az adekvát modelltéren értelmezve és  $\mathbf{p}_1$  egy kevésbé jó modell paraméterei. Ekkor 3.11.-nek megfelelően a kétféle modelltér közötti modellhiba elvileg beiktatható a minimalizálandó funkcionálba. A kétféle eltérés korrelálatlansága esetén egy további kvadratikusan tag jelenik meg, a modellhiba torzító hatásaként, eltolva a minimum helyet:

$$Q(\mathbf{p}) = \sum_i w_i \left[ Ra_i - Ra'(\mathbf{p}_2, z_i) \right] + \left[ Ra_i'(\mathbf{p}_2, z_i) - Ra_i'(\mathbf{p}_1, z_i) \right]^2 = \min . \quad (3.11.b.)$$

A fenti funkcionál alapján célszerű meghatározni a különböző típusú modellek mérések terében létrejövő ekvivalenciáit is:

$$Q(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sum_i w_i \left( Ra_i(\mathbf{p}_1) - Ra_i(\mathbf{p}_2) \right)^2 = \min . \quad (3.12.)$$

Az ekvivalenciát meghatározó minimumot statisztikai szempontból vizsgálni kell ( $\chi^2$ -próba). Bár ebben az esetben nem valószínűségi változókat vetünk össze, az eltéréseket a lehetséges mérési hibákkal kell összevetni, ha az ekvivalenciát akarjuk értelmezni.

## 4. Kiterjedt elektródák modellezése

Az elektromos karotázsmérések modellezésénél, több szondatípus esetében sem kielégítő pontosságú a forrás leírására a pontelektróda modell. Sok esetben nem lehet eltekinteni a passzív és aktív elektród véges méretétől. A legfontosabb ilyen esetek:

- Elektródához közeli jelentős fajlagos ellenállás kontraszt,
- Kiterjedt elektródás laterologok (dual laterologok, LL3),
- Az árameloszlás, felületi potenciál, átmeneti ellenállás számítása,
- Penetrációs elektromos eszközök modellezése,
- Mikroszközök modellezése.

Ebben a fejezetben a kiterjedt elektródák terének modellezésére szolgáló számítási eljárást mutatok be és alkalmazom dual-laterolog valamint a penetrációs elektromos szonda potenciálterének számítására.

### 4.1. A feladat megfogalmazása

A kiterjedt elektróda esetében is Bessel-Fourier transzformált alakban keressük a potenciál eloszlást leíró általános megoldást. Kihasnálva a közeg és az elektródelrendezés szimmetriáját – csak radiális inhomogenitások esetében – az általános megoldás 3.5. egyenlethez hasonlóan a következő alakú, a Bessel-egyenlet lineárisan független megoldásaira épül:

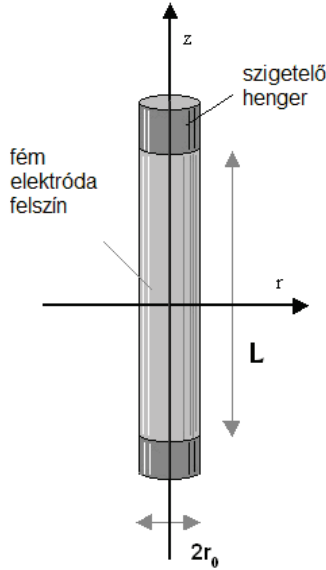
$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [B(m)I_0(mr) + A(m)K_0(mr)] \cos m(z - z_0) dm. \quad (4.1.)$$

A probléma megoldása itt is a határfeltételeket kielégítő együttható függvények  $(A(m), B(m))$  származtatását jelenti. Kiterjedt elektródák a feladat megoldásakor az elektród felületnél kirótt határfeltételt jelentenek. Az elektróda hatása vagy Neumann-féle, felületi áramsűrűségre kirótt, hengersizmetrikus határfeltételként vehető figyelembe, vagy Dirichlet-feladatként – potenciálra kirótt – határfeltétel alkalmazandó, de leggyakrabban ismeretlen potenciálú ekvipotenciális felületként jelenik meg.

### 4.2. Elektróda modell

Analitikus, fél analitikus megoldások származtatásánál az elektromos szondák elektródájának modellezése többféle módon történhet. Dakhnov könyvében [Dakhnov 1967] ellipszoid elektródát, a hengersizmetrikus tér torzítása mellett, míg de-Witte cikkében [de-Witte 1959] szigetelőhengeren elhelyezkedő hengergyűrű elektróda modellt javasol. Jelen fejezetben ez utóbbi modell a kiinduló pont (4.1. ábra). Azaz az elektróda a szigetelő szondatesten ideális vezető felületként helyezkedik el. A feltételezéseknek megfelelően a Neumann-peremfeltétel érvényesítésével, az elektród felületnél az áramsűrűségnek –  $J(z, r_0)$  – csak radiális komponense van, míg a szigetelő szondatestnél zérus a radiális összetevő. A potenciáltér számításánál a felületi áramsűrűség eloszlás nem ismert, viszont az elektródfelszín – ha

ideális vezetőnek tekintjük – ekvipotenciális felületnek tekinthető. A felületi potenciál a szondageometria és a betáplált áram függvénye.



4.1. ábra. Az elektróda modellje

A  $z$ -koordináta szerinti felületi árameloszlás és az elektród körül kialakuló potenciál kapcsolatát egy Fredholm-típusú elsőfajú integrálegyenlettel fejezhetjük ki:

$$U(r, z) = \int_{z' \in \eta} J(z') G(r, z, z') dz'. \quad (4.2.a.)$$

A  $z'$  változó a koordináta rendszer  $z$  tengelyénél elhelyezett elektród felületén ( $\eta$ -tartomány) fut végig. Az elektród tartomány nem feltétlenül összefüggő, jelenthet elektróda rendszert is. Külső potenciáltér ( $U_k$ ) jelenlétében az inhomogén probléma másodfajú Fredholm-típusú integrálegyenlettel írható le:

$$U(r, z) = \int_{z' \in \eta} J(z') G(r, z, z') dz' + U_k(r, z), \quad (4.2.b)$$

ahol a magfüggvény a probléma Green-függvénye. A modellezés fontos lépéseként a fenti integrálegyenletet kell megoldani az áramsűrűség meghatározásához, úgy hogy általában az összarámra vonatkozó mellékfeltétel ismert, vagy ritkábban ismert felületi potenciál mellett (Dirichlet-feladat). Az elsőfajú Fredholm-egyenlet megfelelő regularizációk nélkül inkorrekt kitűzésű feladatnak számít [Tikhonov 1963], amely azt jelenti, hogy a megoldás nem egyértelmű. (A 4.2. integrálból például látható, hogy olyan árameloszlás függvény, melynek spektruma a Green-függvény spektrumának lecsengő részére esik, elvileg hozzáadható a megoldáshoz, anélkül, hogy azt érdemben módosítaná.) Az összarám ismerete egyfajta nem

Tikhonov-típusú regularizációnak tekinthető. Az áramerősség hozzáadható a 4.2.a. egyenlethez, így az integrálegyenletben egy korrigált magfüggvényhez jutunk. Ezzel az árameloszlás spektrumának zérus frekvenciához tartozó elemét tartjuk kézben.

$$U(r, z) = \int_{z' \in \eta} J(z') G(r, z, z') dz' + R_0 \int_{z' \in \eta} J(z') dz' - IR_0 \quad (4.2.c.)$$

$$U(r, z) + IR_0 = \int_{z' \in \eta} J(z') (G(r, z, z') + R_0) dz'.$$

Itt  $R_0$  az elektródát körülvevő közeg fajlagos ellenállása.

### 4.3. A Green-függvény meghatározása

A 4.2. egyenletben szereplő Green-függvény a Dirac-delta gerjesztésre adott válasz, mely szimmetria okokból jelen esetben az infinitesimalis elektróda (gyűrűelektróda) potenciál tere. Kiindulva abból, hogy a gyűrű elektród felületi radiális áramsűrűsége csak egy ponton ( $z$ ), az elektród pozíciójánál különbözik zérustól, egyenletet írhatunk fel a forrásra [de-Witte 1959]:

$$\delta(z' - z, r - r_0) = -\frac{2\pi r_0}{R} \left( \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right)_{r=r_0}. \quad (4.3.)$$

A 4.3. összefüggésben az áramsűrűsége vonatkozóan a gyűrű mentén  $-\varphi$  szerint – integrált érték szerepel. A fenti egyenletbe behelyettesítve a homogén térre vonatkozó szimmetrikus általános megoldást, (melyben csak a végtelenben lecsengő módosított Bessel-függvény ( $K_0$ ) együtthatója lehet zérustól különböző):

$$U_{\text{hom}}(r, z) = \int_0^{\infty} A(m) K_0(mr) \cos mz dm \quad (4.4.a.)$$

valamint az origónál elhelyezett Dirac-delta Fourier-transzformáltját, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos mz dm = \frac{2\pi r_0}{R} \int_0^{\infty} m K_1(mr_0) A(m) \cos mz dm. \quad (4.4.b.)$$

A paraméteres integrálok egyenlőségéből (Lagrange-lemma) a spektrális együttható függvények egyenlőségét kapjuk, melyből:

$$A(m) = \frac{R}{2\pi^2 r_0} \frac{1}{m K_1(mr_0)}. \quad (4.5.)$$

A Green-függvényre így az alábbi kifejezés adódott:

$$G(r, z - z') = \frac{R}{2\pi^2 r_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{m K_1(mr_0)} K_0(mr) \cos(m(z - z')) dm. \quad (4.6.)$$

Megjegyezzük, hogy a Green-függvény gyenge szingularitása miatt, a modell továbbfejlesztésével a véges felületi potenciálú elektróda potenciáltere is előállítható. Látható, hogy a spektrum az elektróda sugarával zérushoz tartva a pontelektródra vonatkozó kifejezést szolgáltatja, hiszen a  $K_I$  módosított Bessel-függvény zérus közelében  $1/x$  függvényként viselkedik, így az integrandusban  $K_0$  együtthatója egységnyivé válik, határátmenetben a pontforrás terét adva (Weber-Lipschitz integrál). Radiálisan inhomogén közegben a spektrumban szereplő együttható-függvényekre vonatkozó egyenlet a következőképp módosult:

$$\frac{IR}{2\pi^2 r_0 m} = K_1(mr_0)A_0(m) - I_1(mr_0)B_0(m). \quad (4.7.)$$

Kiterjedt forrásnál (4.7. szerint) csak az együttható függvények lineáris kombinációjára kapunk térfrekvenciától függő egyenletet. Az együttható függvények meghatározásához ekkor az összes további határfeltétel is szükséges. A gyűrűelektród teréből 4.2. egyenlet segítségével származtatható az egyenletes felületi áramsűrűségű elektród tere, mely az áramsűrűség eloszlás lépcsőfüggvénnyel történő közelítésekor játszik alapvető szerepet. Mintavételezett áramsűrűség és potenciál esetében ezen a modellen kialakuló potenciál veszi át a Green-függvény szerepét. Ezzel a mintavételezéssel a 4.2. integrálegyenlet lineáris egyenletrendszerre alakítható. A gyűrűelektród potenciálfüggvényének véges tartományon történő konvolúciójával származtatható az egyenletes árameloszlású hengerelektród tere (4.8.):

$$\begin{aligned} U(r, z) &= \frac{IR}{2\pi^2 r_0} \int_0^\infty A(m)K_0(mr) \cos mz \int_{-L/2}^{L/2} \cos mz' dz' dm = \\ &= \frac{IR}{2\pi^2 r_0} \int_0^\infty (A(m)K_0(mr)) \cos(mz) \operatorname{sinc}\left(\frac{mL}{2}\right) dm \end{aligned} \quad (4.8.)$$

Azért, hogy az összárám ( $I$ ) ugyanaz maradjon, a konvolúció képzésnél a gyűrűelektród áramát szétterítjük az elektród teljes hosszára ( $L$ ), az alábbi feltétel érvényesülése mellett:

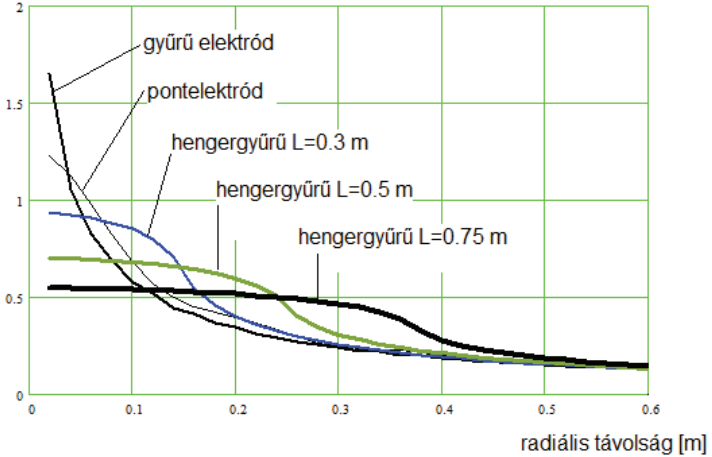
$$J(z) = \frac{dz}{L} I. \quad (4.9.)$$

Ez biztosítja a véges felületi potenciált, hiszen az infinitezimális gyűrű véges árama a konvolúcióval így véges térrészre terül szét (kihasználva a magfüggvény gyenge szingularitását). Radiálisan inhomogén közegben az egyenletes eloszlású hengergyűrű potenciáltere:

$$U(r, z) = \frac{IR}{2\pi^2 r_0} \int_0^\infty (A(m)K_0(mr) + B(m)I_0(mr)) \cos(mz) \operatorname{sinc}\left(\frac{mL}{2}\right) dm. \quad (4.10.)$$

A potenciál az elektróda felületén lassan változik, nem konstans és az elektróda szélénél lecsengő. A potenciál eltérése az egyenletes eloszlástól annál jelentősebb, minél rövidebb az elektróda (4.2. ábra), és az elektróda szélétől kb. fél elektróda-hosszynyi távolságon kívül válik elhanyagolhatóvá a potenciálkülönbség a pontforrás potenciálfüggvényéhez képest.

Potenciál [V]



4.2. ábra. Egyenletes árameloszlású elektródák potenciáltere a radiális távolság függvényében. A közeg homogén 1 ohmm ellenállású, a gyűrűelektródák sugara 0.05 m volt.

#### 4.4. Felületi áramsűrűség becslése – egy árambebocsátó elektród esete

Az elektród felületi áramsűrűségét lépcsős függvény formában közelítjük:

$$U(r_0, z)_{z \in \eta} = \int_{z' \in \eta} J(z') G(r_0, z - z') dz' = \text{const.} \quad (4.11.)$$

A fenti egyenletben szereplő függvényeket az elektróda  $z$  szerinti felosztásával diszkrétizálhatjuk, mintavételezhetjük, és így lineáris egyenletrendszerrel közelíthetjük a 4.2. integrálegyenletet. Az egyenletrendszer ismeretlenjei ekkor a részelektródák áramainak vektora lesz:

$$I_i = \int_{z' \in \eta_i} J(z') dz' \quad (4.12.)$$

##### 4.4.1. A probléma megoldása, ha az elektród árama ismert

Bevezethető az alábbi mátrix, melynek elemeit a 4.3. pontban ismertetett modell potenciálfüggvényéből, mint a probléma Green-függvényéből képeztünk:



$$\mathbf{R}_{i,j} = \sum_{k=1}^N G(a, z_i - z_k) - G(a, z_j - z_k). \quad (4.13.)$$

A mátrix egyenletes árameloszlás melletti potenciál különbségeket adja meg az indexhez tartozó két részelektrod között. Ez a forma alkalmas annak figyelembe vételére, hogy az elektrod felszíne ekvipotenciális felület, amely  $n$  db. részelektroda esetében  $n-1$  egyenletet jelent. Ezzel a mintavételi pontokhoz tartozó potenciálok egyenlőségét írjuk elő. A mátrix utolsó soraiban az áramokra vonatkozó kényszerfeltétel iktattam be:

$$\mathbf{R}_{i,N} = 1. \quad (4.14.)$$

A fenti súlyozással például az összáramra vonatkozóan fogalmazhatunk meg kényszert. Az áramsűrűség-vektort innen az egyenlet megoldásaként kapjuk:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (4.15.)$$

A  $\mathbf{b}$  vektor a felületi potenciálok eltérésvektora, homogén esetben – külső potenciáltér hiányában - zérus értékekkel feltöltve. Ha az elektrod viselkedését külső térben tanulmányozzuk (inhomogén probléma), akkor a  $\mathbf{b}$  vektor tartalmazza a külső potenciáltér megfelelő értékeit:

$$b_i = 0 + U_k(a, z_i) - U_k(a, z_{ref}). \quad (4.16.)$$

A vektor utolsó sorába az összáram kerül. Nincs lényeges különbség a megoldásban, ha az elektrod nem összefüggő, de azonos potenciálon levő elektrodák rendszere. Minden aktív elektrod árameloszlás függvénye felbontható két részre, egy szimmetrikus saját potenciáltól származó eloszlásra és a többi elektrod potenciál terében egy passzív elektrod árameloszlására (visszahatás).

#### 4.4.2. A probléma megoldása, ha az elektrod potenciálja ismert

Ez a gyakorlatban ritkábban előforduló eset. Ekkor az  $\mathbf{R}$  mátrix:

$$\mathbf{R}_{i,j} = G(a, z_i - z_k), \quad (4.17.a.)$$

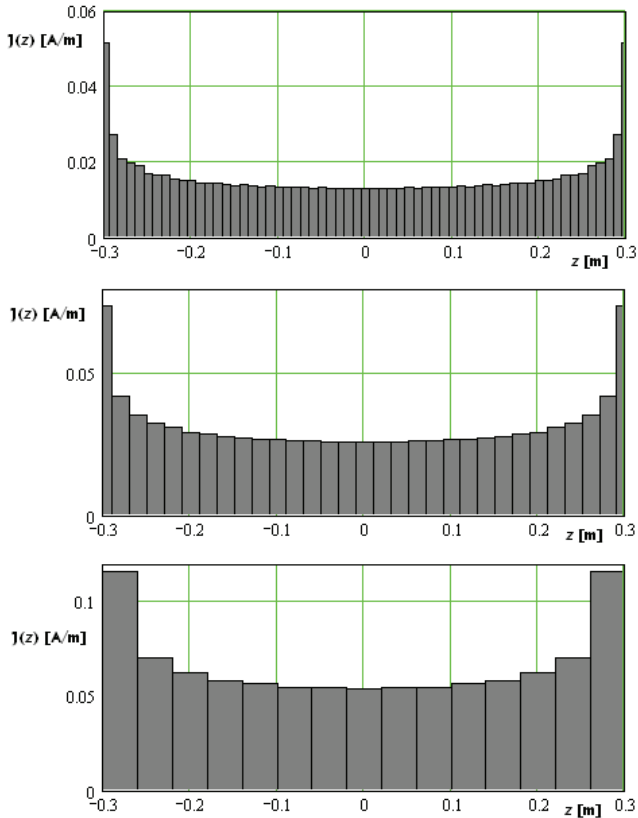
és

$$\mathbf{b}_i = U_i. \quad (4.17.b.)$$

Ilyenkor az összáramra vonatkozó szabályzás természetesen nem írható elő. Megjegyzendő, hogy a becsült árameloszlás a konstans felületi potenciál miatt egyben a részelektrodáknál fellépő átmeneti ellenállások reciprokéval arányos. Ezek az elektrod teljes földelési ellenállásának számításakor párhuzamosan kapcsolódnak.

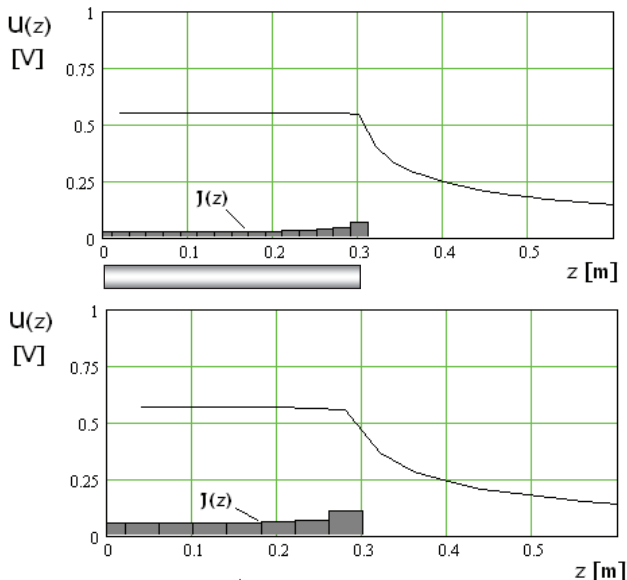
#### 4.4.3. Eredmények

Az alábbiakban különböző finomságú felosztások mellett, mutatom be egy elektroda felületi áramsűrűség-eloszlásait (4.3. ábra). Az elektroda hossza 60 cm, átmérője 10 cm és a bebocsátott áram egységnyi.



4.3. ábra. Vertikális árameloszlás 0.6 m hosszú aktív, egységnyi áramú elektróda felszínén, különböző mintavételi távolságok mellett (0.01 m, 0.02 m, 0.04 m).

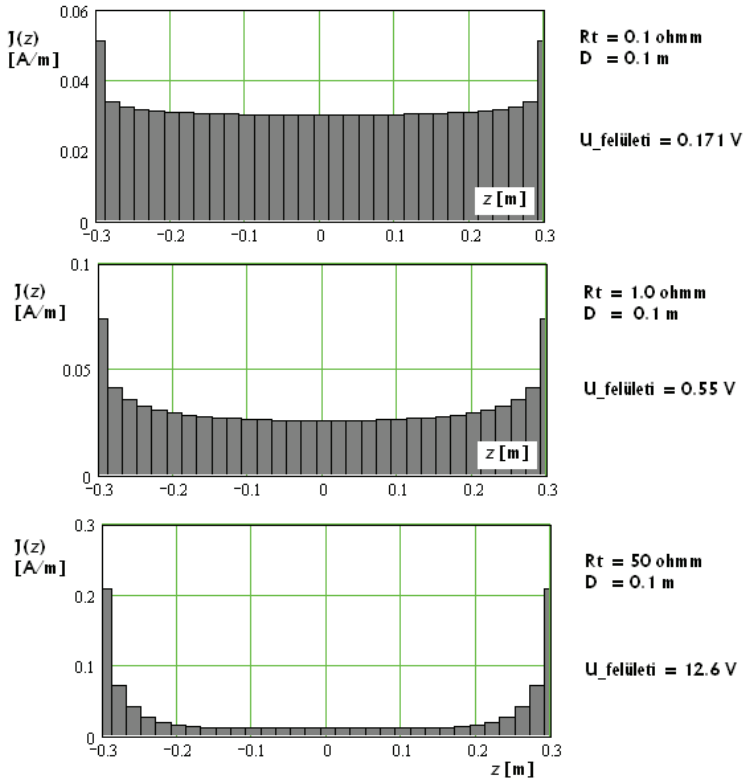
A 4.3. ábra alapján látható, hogy az elektród szélénél jelentősen megnövekszik az áramsűrűség, azaz csökken az átmeneti ellenállás. Ez megfelel a várakozásnak, mivel az elektróda szélénél a többi elektródaelem járuléka a felületi potenciál kialakításában kevésbé érvényesül, így nagyobb lokális árambeocsátás szükséges.



4.4. ábra. Egységnyi áramú elektród felületi potenciálja különböző mintavételi távolságok mellett (0.02 m felül, 0.01 m alul). Az origóban elhelyezett elektród hossza 0.6 m sugara 0.05 m.

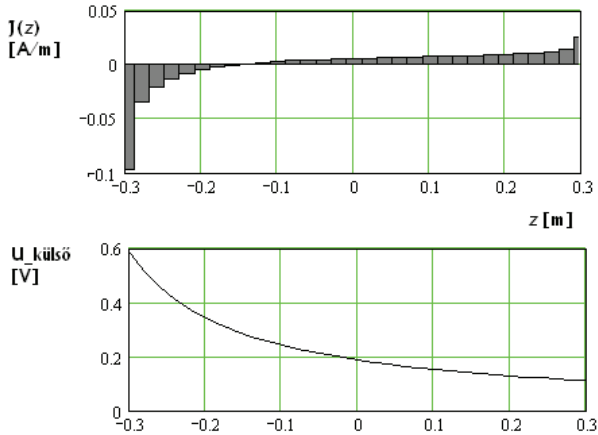
A 4.4. ábrán látható, hogy a felosztás és az árameloszlás becslésének finomítása nem változtatja meg jelentősen a felületi potenciálbecslés pontosságát. Az áramsűrűség pontosabb becslése az elektród környezetében, az elektród szélénél módosítja a potenciált.

Lépcsőfüggvény szerint változó radiális fajlagos ellenállás profil segítségével vizsgáltam a kontraszt árameloszlásra vonatkozó hatását. Az elektródához közeli (elektróda sugárhoz viszonyítva) ellenállaskontrasztok megváltoztatják az árameloszlást (4.5. ábra). A jelentős fajlagos ellenállás növekedés hatására az árameloszlás úgy változik, hogy az elektróda peremén növekszik, a középső tartományban csökken az áramsűrűség, azaz nő az árameloszlás egyenlőtlensége, míg a kis fajlagos ellenállások esetében az árameloszlás az egyenleteshez közeledik, egyre jobban szétszóródnak a részelektródák áramai.



4.5. ábra Árameloszlás különböző közeli ( $r = 0.1 \text{ m}$ ) lépcsős radiális kontraszt esetében. (elektroda sugara  $0.06 \text{ m}$ ). Az elektróda közelében a fajlagos ellenállás minden esetben  $1 \text{ ohmm}$  volt.

Passzív elektródák (mérőelektródák) esetében az áramsűrűség eloszlást a külső potenciáltér alakítja ki (4.6. ábra). Az elektródán kialakuló árameloszlás – a megosztás jelenségéhez hasonlóan – a külső térben ekvipotenciális felületet alakít ki. Az inhomogén probléma megoldásaként kialakuló árameloszlást olyan példán mutatom be, ahol a  $0.6 \text{ m}$  hosszúságú  $0.06 \text{ m}$  sugarú passzív elektródát egy tőle  $0.1 \text{ m}$ -re levő pontelektród terébe helyeztem.



4.6. ábra. Árameloszlás (felül) passzív elektródán külső potenciáltérben (alul).  
A 0.06 m sugarú és 0.6 m hosszú origóban elhelyezett, homogén 1 ohmm fajlagos ellenállású térben elhelyezett elektród felületi potenciálja 0.24 V.

A 4.6 ábrán látható, hogy a pozitív áramforrás felől az áram belép az elektródba, majd kilép ez elektród távolabbi részén (az összáram zérus). Az elektróda közelítőleg átlagolja a felületén mérhető potenciálfüggvényt. Meg kell jegyezni, hogy a felületi feszültség szempontjából nem az elektróda centruma a referencia pont. Példánkban  $-0.11$  m-nél található egyenlőség a külső potenciáltér és a felületi potenciál között. Ez azt jelenti, hogy kiterjedt mérőelektród esetén ezt az effektust is figyelembe kell venni, mely már a műszerállandó értékebe is beleszól.

#### 4.4.4. Felületi áramsűrűség becslés Fourier-sorfejtéssel

Az árameloszlás becslésére vonatkozó integrálegyenlet konvolúció, így az invertálásra megoldás lehet a Fourier-transzformáció, mivel a konvolúció a spektrális tartományban szorzattá alakul. Az árameloszlás spektruma így becslhető lenne, mint a potenciál spektrumának és a Green-függvény spektrumának hányadosa:

$$J(m) = \frac{U(m)}{G(m)}. \quad (4.18.)$$

A potenciál azonban csak az elektród felületén ismert, így az (lokális) inverzió a 4.18. egyenletben felírt módon nem hajtható végre. Problémát jelent továbbá a spektrum lecsengése is, kis értékeinél az inverz instabillá válik. A lokális inverzió – a bázis ortogonalitásának megőrzésével – célszerűen úgy végezhető el, ha az elektróda hossz, mint alapperiódussal  $J(z)$ -t és  $U(z)$ -t Fourier-sorba fejtjük:

$$J(z) = \sum_n a_n \cos \frac{2\pi n}{L} z$$

$$U(z) = \sum_n c_n \cos \frac{2\pi n}{L} z$$

A sorfejtés szimmetrikus árameloszlás és potenciál függvény feltételezésével történt. A  $J(z)$  – egyelőre ismeretlen –  $a_n$  együtthatókkal adott Fourier-sorát a potenciált leíró képletbe helyettesítve:

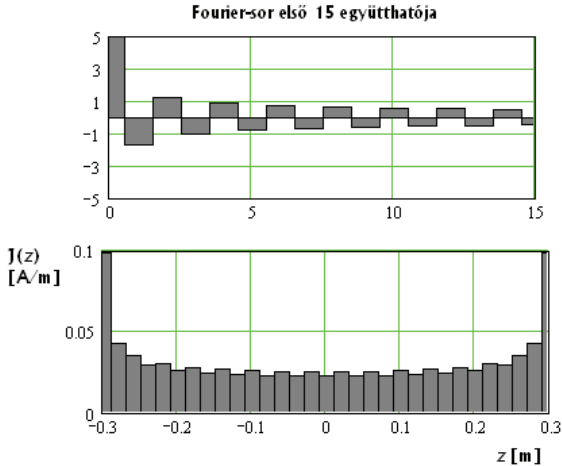
$$U(a, z) = \sum_n a_n \int_0^\infty A(m) K_0(ma) \cos(mz) \int_{-L/2}^{L/2} \cos(mz') \cos\left(\frac{2\pi n}{L} z'\right) dz' dm. \quad (4.19.)$$

Kihasználható, hogy  $U(z)$  konstans az elektróda felületén, azaz csak zérus-rendű Fourier együttható különbözik nullától. Meghatározva a két mennyiség diszkrét spektruma közötti csatolás mátrixát:

$$\mathbf{B}_{k,n} = \int_0^\infty A(m) K_0(ma) \sin^2\left(m \frac{L}{2}\right) (-1)^{n+k} \frac{2m}{m^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2} \frac{2m}{m^2 - \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2} dm. \quad (4.20.)$$

A létrejött lineáris egyenlet megoldásával a potenciál Fourier-együttható vektorából –  $\mathbf{c}$  – meghatároztam az áramsűrűség-vektor Fourier-együtthatóit:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{c} \quad (4.21)$$



4.7. ábra. Árameloszlás (alul) meghatározása Fourier spektrum (felül) alapján (az elektróda sugara 0.06 m, hossza 0.6 m, centrális helyzetű; a közeg homogén, 1 ohmm fajlagos ellenállású).

Az 4.7. ábra szerint a megoldást jól látható mértékben Gibbs-oszcilláció terheli, valamint az együtttható sorból látszik, hogy a Fourier-sor konvergenciája igen lassú, mely a lokalizált inverzióval kapcsolatos.

#### 4.4.5. Árameloszlás becslése sorfejtéssel

Ha sorba fejtjük a felületi áramsűrűség függvényt  $J(z)$  körül  $z$ -től távolodva és így helyettesítjük az integrálegyenletbe:

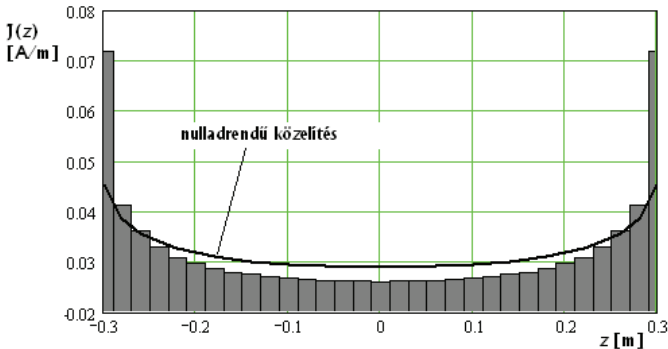
$$U(r, z) = J(z)M_0(z) + \frac{\partial J(z)}{\partial z} \int_{z \in \eta} (z' - z)G(z, z')dz' + \dots \quad (4.22.)$$

Itt  $M_0(z)$  az egyenletes árameloszlású elektród potenciál tere, a Green-függvény nulladik momentuma:

$$M_0(z) = \int_{z \in \eta} G(z, z')dz' \quad (4.23.)$$

Így az árameloszlás nulladrendű közelítése:

$$J(z) = \frac{U(z)}{M_0(z)} \quad (4.24.)$$



4.8. ábra. Felületi árameloszlás becslése nulladrendben, összevetve a 0.02 m-es felosztással számolt árameloszlással (ez elektróda hossza 0.6 m, sugara 0.06 m; homogén 1 ohmm fajlagos ellenállású közegben)

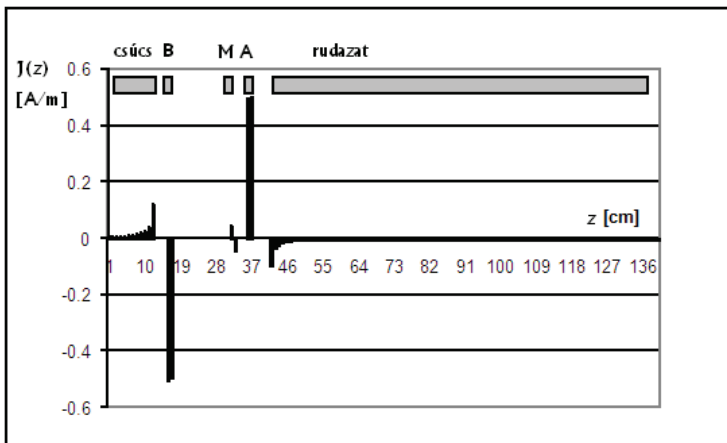
A nulladrendű közelítés a szélektől eltekintve jól reprodukálja az árameloszlást. A közelítés különösen a kisebb radiális fajlagos ellenállás kontrasztoknál megfelelő. A magasabb rendű

közelítésnél, a sorfejtés eredményeképp egy inhomogén differenciálegyenletet kapunk, melynek függvényegységét, a Green-függvényre vonatkozó momentumok adják.

#### 4.5. A penetrációs elektromos szonda modellezése

Jelen alfejezetben a penetrációs elektromos szondákra alkalmazom a véges elektródákra vonatkozó, a fejezet elején levezetett összefüggéseket. A penetrációs eszközöket fűrőlyuk nélkül, a speciálisan kiképzett eszköz talajba nyomásával juttatják a vizsgálandó mélységbe.

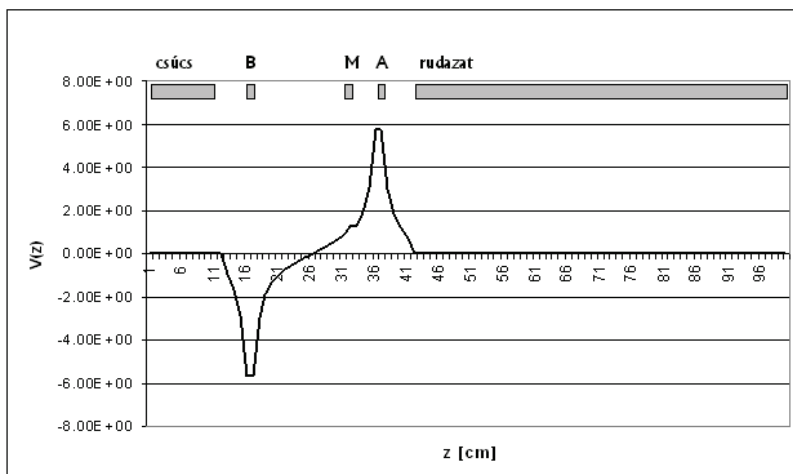
A penetrációs elektromos szondák mérésének értelmezéséhez ismerni kell a penetrációs csúcs és a rudazat hatását, amelyek mint ideális vezetők megzavarják az áramteret. Felhasználva az eddigi eredményeket elvégeztem a penetrációs elektromos szonda modellezését. A penetrációs elektromos szonda modellezéséhez az elektródákat 1 cm finomsággal osztottam fel, beleértve a mérő elektródát is. A csúcsot és a szárat kapcsolt zéruspotenciálú elektródnak tekintettem. A számítások során a mérő elektród (M) zérus összáramú passzív elektróda volt. A csúcsot a modellezésnél hengerrel közelítettem. A szonda felületi árameloszlása homogén közegben az alábbi módon alakult (4.9. ábra):



4.9. ábra. Árameloszlás a penetrációs szonda felszínén. Látható, hogy a rudazat elnyeli az A elektródáramának egy részét, míg a B elektródára visszatérő áram egy része a csúcson keresztül tér vissza. Látható, hogy a mérő elektródán is átfolyik az áram egy része.

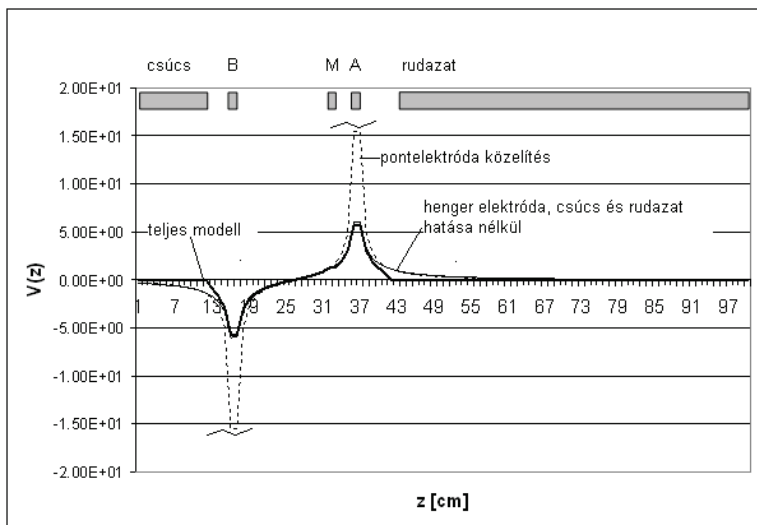
Látható, hogy a passzív elektródák – a csúcs és szár – a közeli aktív elektródák áramának egy részét elvezetik. A számított áramsűrűség vektort felhasználva a felületi potenciál eloszlás a következőképp alakul (4.10. ábra):





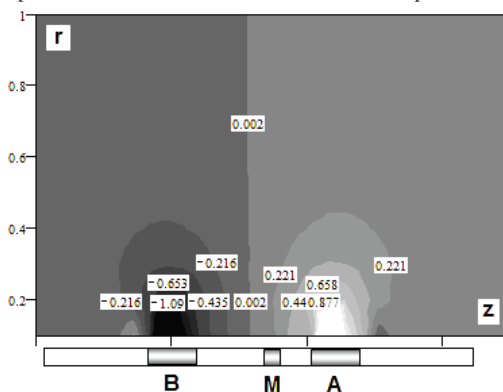
4.10. ábra. Potenciál eloszlás a penetrációs szonda felületén, a 4.9 ábrán látható árameloszlásból számítva. Látható, hogy minden elektród, a rudazat és a csúcs is ekvipotenciális felület.

A 4.10. ábrán látható a mérő elektród, mint passzív elektród „potenciálátlagoló” hatása. A potenciál eloszlást összevetettük más közelítésekben számolt potenciál eloszlással (4.11. ábra) (a szár és csúcs nélküli, valamint a pontelektródával számolt értékekkel)



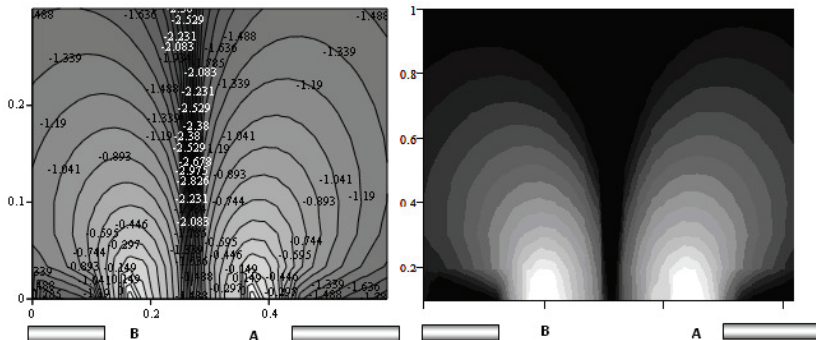
4.11. ábra. Felületi potenciáloszlás háromféle közelítésben. (vastag vonal: reális modellezés, vékony vonal: potenciál csúcs és szár nélkül, szaggatott vonal: pontelektróda közelítés)

A 4.12. ábra a penetrációs sonda elektródái körül kialakuló potenciáloszlást mutatja be.



4.12.a. ábra. Potenciáloszlás 2 dimenzióban a penetrációs sonda elektródarendszere körül.

A potenciálteroszások jobb kiemeléséért a 4.12.b. ábra a potenciál abszolút értékének eloszlását mutatja logaritmikus skálán.



4.12.b. ábra A potenciál abszolút értéke logaritmus skálán, (baloldalon számértékekkel)

A 4.12.b. ábrán jól látható a csúcs és a rudazat torzító hatása. Az ekvipotenciális felületek elnyúlnak a rudazat és a csúcs irányába, így az áramsűrűség kisebb a mérőelektroda környékén.

A szonda modellezés eredményeiből látható, hogy a szár és csúcs hatása valóban nem hanyagolható el. Megállapítható, hogy homogén közegben kb. 10 %-ban torzítják a mérő elektródnál kialakuló potenciált, így már a szondaállandó esetében is 10% különbség van, ha figyelembe vesszük a rúd és a csúcs hatását, illetve ha elhanyagoljuk ezeket. A szondaállandó az első esetben 0.799 a második esetben 0.875. Tehát, ha a rudazat hatásával nem számolunk, szisztematikusan kb. 10 %-al nagyobb fajlagos ellenállást mérünk. A rudazat és a csúcs, mint kis ellenállású elemek a betápláló elektródák áramát részben elvezetik, így torzítják az **A** és **B** elektród közötti potenciálteret.

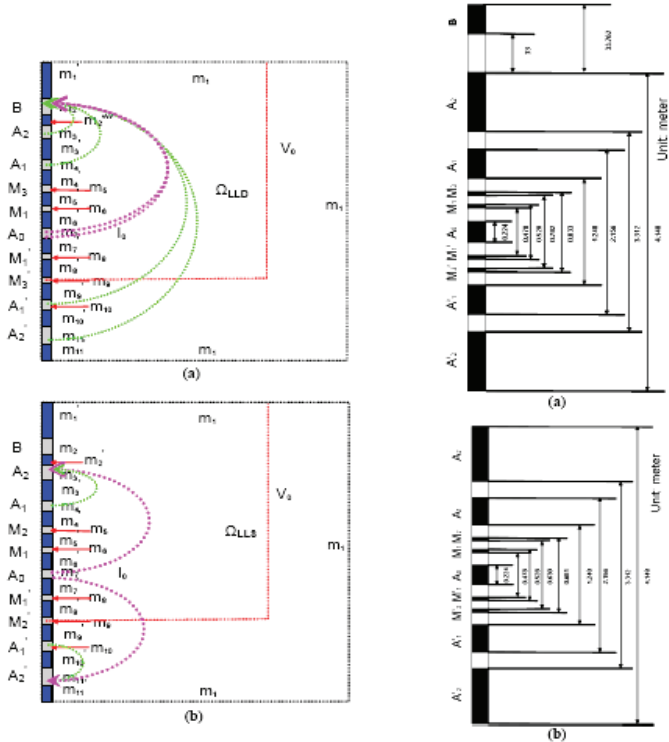
#### 4.6. Dual-laterolog modellezése

Ebben az alfejezetben a dual-laterologok mérésének modellezésére használtam fel a 4.2. fejezetben definiált véges elektróda modellt. Az olajipari mérések gyakorlatában nagyon fontos szerepet játszanak a különböző típusú dual-laterologok. Jellemzőségük a kb. méteres hosszúságú terelő elektródák (A1, A2). A 4.9. ábrán a dual-laterolog két üzemmódjára vonatkozó vezérlés és az elektródák elhelyezkedése látható. Az un. LLD (mély behatolású) módban (erőteljesebb fókuszálás) az A1 és A2 elektródák azonos potenciálon vannak (potenciálvezérlés), egy több méteres szimmetrikusan elhelyezkedő terelő áramteret létrehozva. A teljes áramtér belépő árama a 33 m-re elhelyezett B elektródnál tér vissza. Az un. LLS (sekély kutatási mélységű) üzemmódban, A2 fogadja A1 áramát és szimmetrikus közegben A0 központi elektród áramának felét.

Mindkét üzemmódban a terelő elektródák összárámát az M1-M2 elektródák közötti potenciálkülönbség vezérli, oly módon, hogy ennek a potenciálkülönbségnek zérusnak kell lennie. A látszólagos fajlagos ellenállás számítás az M1-M2 elektródák potenciálja alapján történik. A számítások során az elektródákat 2.54 cm-es részelektrodákra osztottam. A potenciál számításánál alkalmazott Green-függvény ilyen hosszúságú egyenletes árameloszlású hengerelektroda tere volt. A szonda modellezésekor 155 komponens elektródból állt. Ezek mindegyikét ekvipotenciális felületnek tekintettem.

LLD módban a szabályzási feltételek:

- A0 árama egységnyi,
- A1 potenciálja megegyezik A2 potenciáljával,
- A1 potenciálja megegyezik A2 potenciáljával,
- M1, M2, M1, M2 azonos potenciálon van.



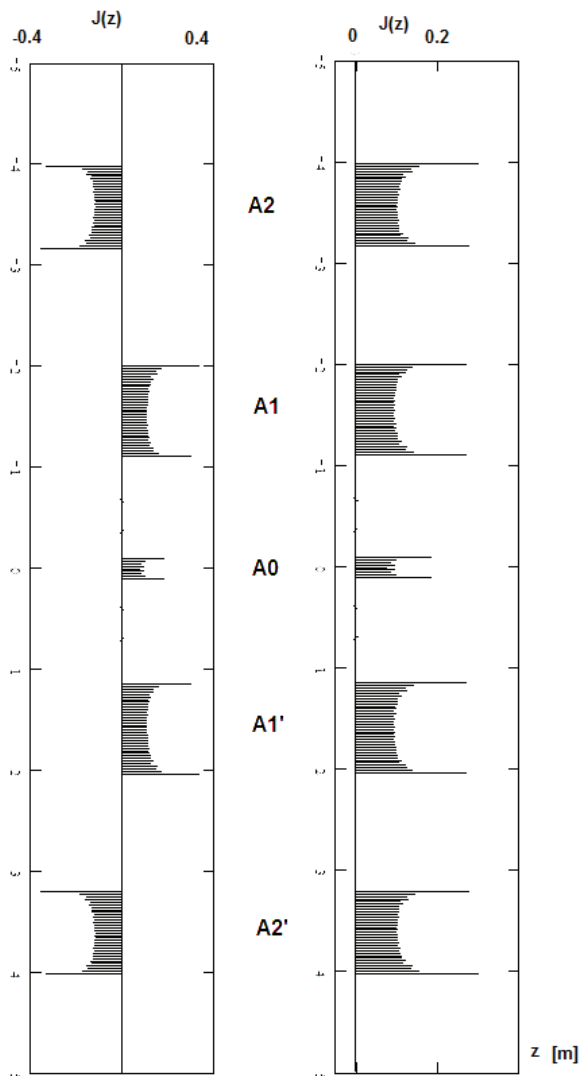
4.13 ábra. A dual-laterolog vezérlése és elektródái (a. LLD és b. LLS)

LLS mód szabályzási feltételei:

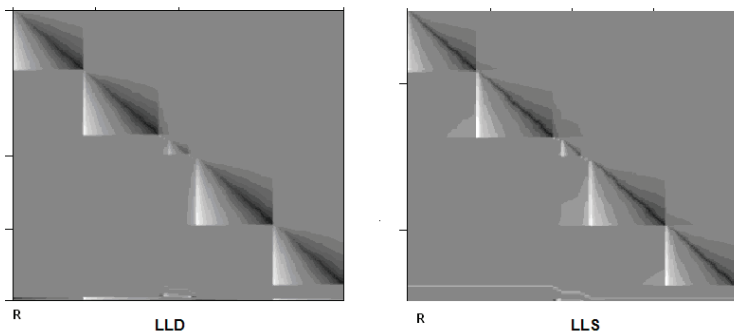
- A0 árama egységnyi,
- A1 összaráma és A0 áramának fele megegyezik A2 –nél kilépő árammal,
- A1 összaráma és A0 áramának fele megegyezik A2 –nél kilépő árammal,
- M1, M2, M1, M2 azonos potenciálon van.

A 4.14. ábrán LLD és LLS módban számított árameloszlás lépcsőfüggvényei láthatók. A számításokat 1 ohm fajlagos ellenállású homogén térre végeztem. Kis torzulással itt is

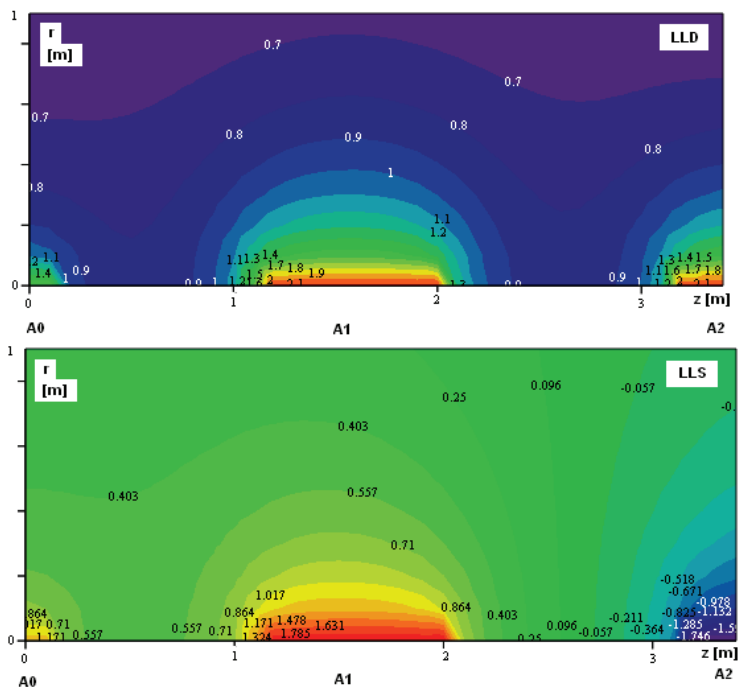
kialakul elektródaként az egyedülálló elektród esetében meghatározott árameloszlás profil, az elektróda széleknél tapasztalható felületi áramsűrűség növekedés.



4.14. ábra. A 155 komponens elektródára számított árameloszlás  $J(z)$  homogén térben ([A/m]. Az A0 elektróda összárama egységnyi. Baloldalt LLS jobboldalt LLD módban.

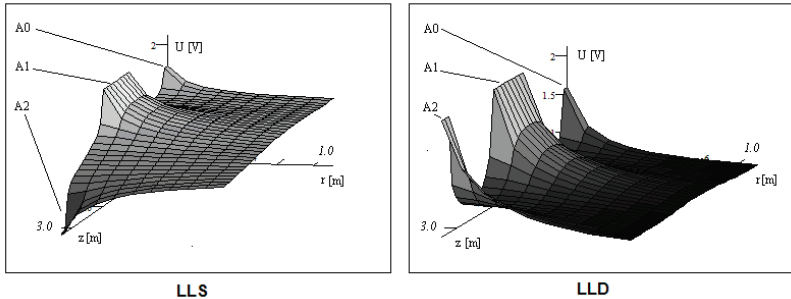


4.15. ábra. Az árameloszlás meghatározásához szükséges együttható mátrixok szerkezete



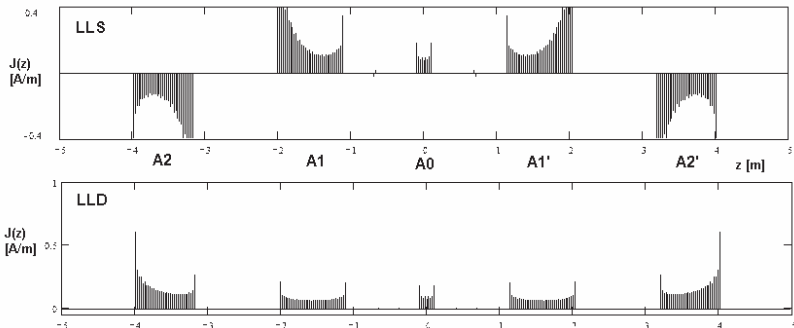
4.16.a. ábra. Dual-laterolog potenciáltere homogén térben (felül: LLD, alul LLS)

A 4.15. ábrán az árameloszlás lineáris egyenletrendszerének 150x150-es együttható mátrixok szerkezete látható grafikus formában. A képek baloldalán látható vonalak az áramra közvetlenül kirótt szabályzási feltételek. A 4.16.a. ábra a szonda centrális részének környezetében, homogén térben kialakuló potenciáalteret mutat be.



4.16.b. ábra Dual-laterolog potenciáltre felületként szemlélítve az A2 elektród felől nézve.

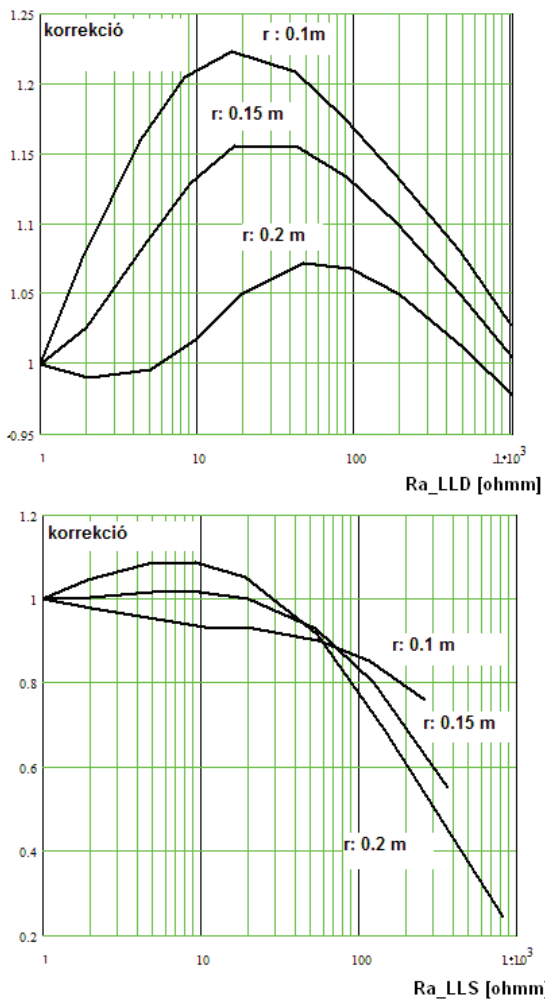
A homogén közegben kialakuló árameloszlás jelentősen torzul, a szonda felszínéhez közeli nagyobb ellenállások esetében (4.17. ábra).



4.17. ábra. Árameloszlás dual-laterologon 30 ohmm-es fajlagos ellenállás kontraszt esetén (elárasztás mélysége 0.1 m)

A fajlagos ellenállás kontraszt növekedésével erőteljesebbé válik az elektródák csatolása. Az LLD árameloszláson látszik, hogy szinte egyetlen elektród eloszlásának képét veszi fel a teljes árameloszlás kép. Példaként bemutatjuk az ismertett eljárással készült lyukhatás korrekciós diagramot (4.18. ábra), az LLD és LLS szondákra. A számított korrekciók esetében néhol jelentős eltérés mutatkozik a gyártó által megadott diagramokkal. Megjegyzendő, hogy a gyártó által megadott diagramok nem a korrekciómentes pontból indulnak ki. Ez a látszólagos fajlagos ellenállások torzítására utal. Az LLS esetében a közeli nagy kontraszt néhány 100 ohmm felett csak igen nagy terelő áramok kibocsátásával biztosíthatók a szabályzási feltételek ( 100 A ), melyet az áramgenerátor már nem biztosíthat.

Itt a mérések nagyon bizonytalanná válnak, a szabályzási feltételek nem teljesülnek maradéktalanul.



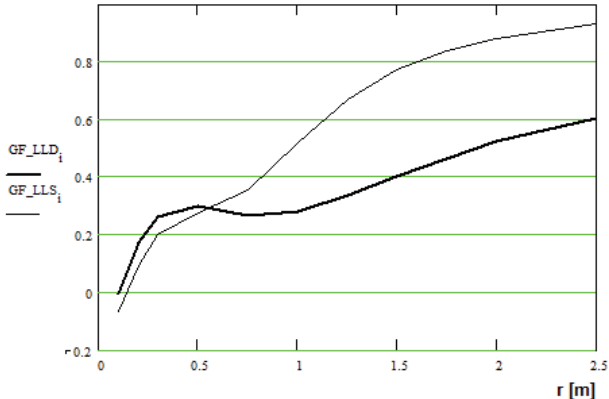
4.18. ábra. Lyukhatás korrekciós diagramok LLD és LLS laterologokra.

Az LLS mérés vizsgálatára 250 ohmm fajlagos ellenállás kontrasztján kísérletképpen 5 ezreléknyi hiba feszültséget tételeztem fel az M1-M2 elektródák között, ennek hatására a felére esett a mérőelektródánál mérhető potenciál a terelő áramok csökkenésével.



A szonda radiális érzékenységet jellemzi adott fajlagos ellenállás kontraszt mellett az un. pszeudo-geometriai faktor függvény ( $GF(r)$ ). A 4.19. ábrán szereplő függvény közepes fajlagos ellenállás kontrasztoknál használható ( $Rt = 10$  ohmm-re vonatkoztatva készült). A pszeudo-geometriai faktor számításánál  $r$ -nél helyezzük el az elárasztás határát, meghatározva azt a súlyfaktort, mely éppen a számított  $Ra$  értéket szolgáltatja  $Rt$  és  $Ri$  értékeiből:

$$GF(r) = \frac{Rt - Ra(r, Rt, Ri)}{Rt - Ri}.$$



4.19 ábra. Az LLD és LLS szondák pszeudo-geometriai faktor függvényei (két réteges modellel számolva)

Kis elárasztások ( $D/2 < 0.5$  m) esetén nincs jelentős különbség a két szondatípus látszólagos fajlagos ellenállása között, míg 1.5 m-nél nagyobb elárasztásnál az LLS már nem érzékeny az érintetlen zóna fajlagos ellenállására.

#### 4.7. Konklúzió

A felületi potenciált leíró integrálegyenlet megoldásával számítottam az elektródákon kialakuló felületi árameloszlást. Az eredményekből látható, hogy az áramsűrűség az elektródák szélénél jelentősen megnövekszik. Az elektróda véges méretétől az elektróda hossz távolságon belül nem lehet eltekinteni. Az elektróda felületi árameloszlását a közeli (az elektróda sugarához képest kis távolságon belüli) fajlagos ellenállás kontraszt jelentősen megváltoztatja, a fajlagos ellenállás növekedése az árameloszlás inhomogenitását növeli. Passzív, mérőelektródáknál a megosztáshoz hasonló jelenség tapasztalható, zérus összegű felületi árameloszlás alakítja ki az ekvipotenciális felületet.

A penetrációs szonda modellezés eredményeiből látható, hogy a szár és csúcs hatása valóban nem hanyagolható el, megállapítható, hogy homogén közegben kb. 10 %-ban torzítják a mérő elektródánál kialakuló potenciált. A dual-laterologokra alkalmazva a nyújtott elektródák potenciálterének számításánál ismertetett eljárást, a bonyolultabb szabályzási feltételek is

könnyen beépíthetők a számítási modellbe. A laterologoknál alkalmazott kiterjedt elektródák elengedhetetlenné teszik az árameloszlás pontos meghatározását, mely különösen fontossá válik nagy fajlagos ellenállás kontrasztok esetében, mikor a különböző elektródák árameloszlása erősen csatolódik (4.17. ábra). A módszerrel különböző szondakarakteristikákat származtattam (pszeudo-geometriai faktor függvény, lyukhatáskorrekciós diagrammok). A modellezés eredményei választ adnak arra a többször felvetett problémára is, hogy miért nem helyettesíthető egyszerűen a laterolog a komponens potenciál szondákkal, ugyanis az árameloszlás jelentősen változik a mérendő közeg fajlagos ellenállásának függvényében.

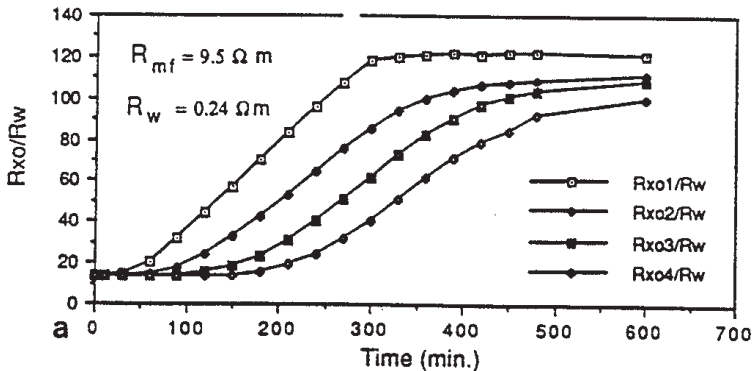
## 5. Direktfeladat megoldás változó radiális fajlagos ellenállás profil esetén

A szondák elektróda rendszerének modellezése után jelen fejezetben a mért közeg különböző inhomogenitásainak modellezésével foglalkozom.

### 5.1. Az elárasztás folyamatának modellezése

A karotázs ellenállásmérések inverziója, azaz közeg fajlagos ellenállás-paramétereinek meghatározása hagyományosan az elárasztás lépcsőprofilal történő modellezésére épül. A valós elárasztás és ehhez kapcsolódóan a radiális fajlagos ellenállás profil ( $R(r)$ ) valójában folytonos, így ennek leírására jobb közelítés valamely kevés paraméterrel jellemezhető folytonos függvény (lineáris, vagy exponenciálisan változó profil).

A labormérésekkel kapott kísérleti adatok alátámasztják ezt a feltételezést [Jiao, 1992]



5.1. ábra. Közvetmintán négy pozíciónál elvégzett ellenállás mérés alapján, a kialakuló elárasztás profil időbeli fejlődése látható [Jiao 1992]. (A minta anyaga homokkő, porozitása 21.5 %, permeabilitása 103.7 md, a nyomás 6.89 MPa volt.)

A profil függvénye a fűrőiszap-filtrátum típusának és koncentrációjának, a rétegvíz fajlagos ellenállásának, a permeabilitásnak valamint a kísérletnél alkalmazott nyomásnak.

A kevés paraméterrel jellemezhető függvény lehetővé teszi, hogy az inverzió a hagyományos (lépcsőfüggvényhez kötődő) inverzióhoz hasonlóan elvégezhető legyen. A paraméterszám az említett függvényeknél ugyanaz, mint a hagyományos inverzióknál. A mérések terében levő ekvivalenciák alapján a kétféle modell megfeleltethető egymásnak (3.12. összefüggés). Mivel a távoli zóna paramétereit kizárólag az elektromos mérések segítségével lehet becsülni, nagy jelentősége lehet a közegmodell pontosításának.

## 5.2. Direktfeladat megoldás az ellenállás radiális változása esetében

Radiális inhomogenitások esetére analitikus közelítést közöl cikkében [Roy, 1994]. A fajlagos ellenállás radiális változását is magába foglaló parciális differenciálegyenletről indultak ki:

$$\nabla(\sigma \nabla U) = 0.$$

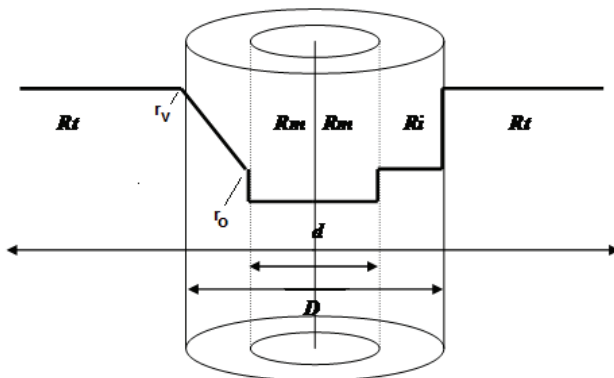
A változók szétválasztása után a  $\Re(r)$  radiális komponensére vonatkozó differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{d^2 \Re}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Re}{dr} - \frac{1}{R_i} \frac{dR_i}{dr} \frac{d\Re}{dr} - m^2 \Re = 0. \quad (5.1.)$$

A szerzők megemlítik, hogy az 5.1. egyenlet közelítő megoldását Frobenius-módszerrel állították elő. Természetesen ez a módszer, melynél a megoldást  $r$  változó polinomjaként keresik, akkor alkalmazható, ha az ellenállás is polinom formában adott. Látható, hogy ha a fajlagos ellenállás konstans, akkor visszkapjuk a Bessel-egyenletet. (Meghatároztam a lineáris profilra vonatkozó polinom együtthatóira vonatkozó összefüggést, amely az 1. függelékben található.) Meg kell említeni a módszer hátrányaként, hogy polinom formában megadott megoldás a határoknál nehezebben illeszthető a más homogén radiális zónáknál Bessel-Fourier formában megadott megoldásokhoz, illetve elő kell állítani egy másik lineárisan független megoldást is. Az 5.1. egyenlettel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy speciális lineáris profilok esetén, ahol az egyenes tengelymetszete zérus, ott a második és harmadik tag kiejti egymást, ekkor a radiális tagra vonatkozó egyenlet exponenciális megoldást ad.

Másfajta megközelítést választott cikkében Drahos D. [Drahos, 1984]. Rekurzív megoldást állított elő a Bessel-Fourier transzformált alakban felírt potenciál határfeltételi egyenleteivel a spektrális együtthatókra. Számításainál a fajlagos ellenállás profilt lépcsőfüggvénnyel közelítette, az áramforrás pontszerű volt.

Jelen dolgozatban kiterjedt elektród esetére állítottam elő közelítő megoldást folytonos függvénnyel leírható fajlagos ellenállás profil esetére. Kiterjedt elektród potenciál függvényéhez a spektrális együtthatókra vonatkozóan írtam fel differenciálegyenlet-rendszert (5.20.) oly módon, hogy meghatároztam, hogy a potenciálteret kialakító radiális rétegek milyen infinitezimális transzformációval egyenértékűek az együttható függvények  $A(m), B(m)$  vektorának változása alapján.



5.1.b ábra. Az elárasztás modellezésénél használt hagyományos lépcsőprofil modell (jobboldalt) és folytonos – itt lineáris – elárasztási profil (baloldalt).

A Laplace egyenlet hengersizmetrikus megoldását a radiális folytonos profil esetében is Bessel-Fourier transzformált formájában keressük. Bontsuk fel a közeget vertikálisan végtelen, radiálisan infinitezimális homogén fajlagos ellenállású hengergyűrűkre. Az  $i$ -edik hengergyűrű belsejében a potenciál a következő alakú:

$$U_i(r, z) = \int_0^{\infty} [A_i(m)K_0(mr) + B_i(m)I_0(mr)] \cos(m(z - z_0)) dm. \quad (5.2.)$$

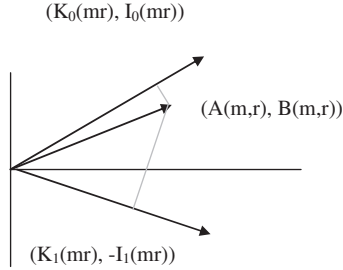
A fenti - Laplace-egyenletet kielégítő – potenciál függvény ( $U(r, z)$ )  $z_0$ -nál elhelyezkedő forrás körül alakul ki. Az 5.2. egyenlet megoldásával a radiálisan inhomogén probléma Green-függvényét állítjuk elő. A Fourier-Bessel transzformált radiális változásait leíró komponensnél az együttható vektorra ( $A_i, B_i$ ) felírhatók a radiális réteghatárnál a megfelelő határfeltételek. Ezeket mátrixformába rendezve az együttható vektorokra vonatkozóan transzformációt határoznak meg (5.3. egyenlet), több réteghatár esetén transzformáció sorozatot. Az infinitezimális rétegek határán ( $i$ -edik és az  $i+1$ -ik réteg határán  $r_i$ -nél) az együttható vektorok – rögzített  $m$  térbeli frekvenciánál – a következő módon transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_0(mr_i)}{-K_1(mr_i)} & \frac{I_0(mr_i)}{I_1(mr_i)} \\ \frac{R_i}{R_i} & \frac{R_i}{R_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_0(mr_i)}{-K_1(mr_i)} & \frac{I_0(mr_i)}{I_1(mr_i)} \\ \frac{R_{i+1}}{R_{i+1}} & \frac{R_{i+1}}{R_{i+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (5.3.)$$

A transzformáció megadásához definiáljuk a következő mátrixot:

$$\mathbf{M}_i(r_i) = \mathbf{M}_i(r_i, m) = \begin{bmatrix} \frac{K_0(mr_i)}{-K_1(mr_i)} & \frac{I_0(mr_i)}{I_1(mr_i)} \\ \frac{R_i}{R_i} & \frac{R_i}{R_i} \end{bmatrix}. \quad (5.4.)$$

A mátrixokban szereplő módosított Bessel-függvények argumentumát ( $mr$ ) a következőkben az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki külön, ha ez nem okoz zavart. A mátrix az együtthatókat a potenciál és az áramsűrűség spektrális komponenseivé transzformálja a határfeltételek teljesítéséhez. (ez egyenértékű az együtthatók, mint vektor Bessel-függvények által meghatározott vektorokra való projekciójával, a probléma megoldása a projekciók alapján is történhet, lásd később az 5.3.3. alfejezetben.)



5.2. ábra. Az együttható vektort a határfeltételek teljesítéséhez 2 mozgó vektorra vetítjük. (A probléma elvileg tárgyalható ebben a mozgó koordinátarendszerben is)

Ebben a formalizmusban a korábban említett rekurzív megoldás [Drahos,1984] a következőképp írható fel 5.3. egyenlet átrendezésével:

$$\mathbf{M}_{i+1}^{-1}(r_i) \mathbf{M}_i(r_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1}, \quad (5.5.a.)$$

ahol:

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix}.$$

A rekurzió folytatható az első réteig:

$$\mathbf{M}_{i+1}^{-1}(r_i) \mathbf{M}_i(r_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{M}_{i+1}^{-1}(r_i) \mathbf{M}_i(r_i) \mathbf{M}_i^{-1}(r_{i-1}) \mathbf{M}_{i-1}(r_{i-1}) \mathbf{e}_{i-1} = \mathbf{e}_{i+1}. \quad (5.5.b.)$$

A transzformáció mátrixa az  $i$ -edik réteghatárnál, az argumentumok elhagyásával:

$$\mathbf{M}_{i+1}^{-1}(r_i) \mathbf{M}_i(r_i) = mr R_{i+1} \begin{bmatrix} \frac{I_1}{R_{i+1}} & -I_0 \\ \frac{K_1}{R_{i+1}} & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & I_0 \\ -K_1 & I_1 \end{bmatrix} = mr R_{i+1} \begin{bmatrix} \frac{I_1 K_0}{R_{i+1}} + \frac{I_0 K_1}{R_i} & \frac{I_1 I_0}{R_{i+1}} - \frac{I_0 I_1}{R_i} \\ \frac{K_1 K_0}{R_{i+1}} - \frac{K_0 K_1}{R_i} & \frac{K_1 I_0}{R_{i+1}} + \frac{K_0 I_1}{R_i} \end{bmatrix}. \quad (5.6.)$$

Ha a fajlagos ellenállás változása folytonos függvény szerinti, akkor az együttható vektor transzformációja felírható infinitezimális transzformáció formájában:

$$\mathbf{M}_{i+1}^{-1}(r_i)\mathbf{M}_i(r_i)\mathbf{e}_i = [\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{T}_{i,i+1}(r_i)]\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1}, \quad (5.7.)$$

ahol  $\varepsilon$  a fajlagos ellenállás relatív változástól függő paraméter. Az infinitezimális transzformáció kifejezést olyan értelemben használom, hogy a transzformáció kismértékben tér el az identitás transzformációtól. Ha  $\varepsilon$  jóval kisebb egynél, akkor a transzformációk sorozata egyszerűen írható fel az  $\varepsilon$ -ban magasabb rendű tagok elhanyagolásával:

$$[\mathbf{I} + \varepsilon_1 \mathbf{T}_{1,2}][\mathbf{I} + \varepsilon_2 \mathbf{T}_{2,3}] \dots [\mathbf{I} + \varepsilon_i \mathbf{T}_{i,i+1}]\mathbf{e}_1 \approx [\mathbf{I} + \varepsilon_1 \mathbf{T}_{1,2} + \varepsilon_2 \mathbf{T}_{2,3} + \dots \varepsilon_i \mathbf{T}_{i,i+1}]\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{i+1}, \quad (5.8.)$$

amely így integrál formában is felírható. Látható, hogy ilyen esetben az egyes transzformációk felcserélhetők és a teljes transzformáció a mátrix elemek integráljaként áll elő:

$$\left[ \mathbf{I} + \int_{r_0}^r \varepsilon(r') \mathbf{T}(r') dr' \right] \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_n. \quad (5.9.)$$

Ha a  $\mathbf{T}$  mátrix elemei függetlenek a fajlagos ellenállás értékektől, akkor geometriai faktor jellegű megoldáshoz jutunk (kis fajlagos ellenállás kontrasztok esete). Hozzuk az 5.6. formulában szereplő transzformációt az 5.7. összefüggésben szereplő alakra:

$$mrR_{i+1} \begin{bmatrix} \frac{I_1}{R_{i+1}} & -I_0 \\ \frac{K_1}{R_{i+1}} & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K_0}{R_i} & \frac{I_0}{R_i} \\ -\frac{K_1}{R_i} & \frac{I_1}{R_i} \end{bmatrix} = mrR_{i+1} \begin{bmatrix} \frac{I_1 K_0}{R_{i+1}} + \frac{I_0 K_1}{R_i} & \frac{I_1 I_0}{R_{i+1}} - \frac{I_1 I_0}{R_i} \\ \frac{K_1 K_0}{R_{i+1}} - \frac{K_1 K_0}{R_i} & \frac{K_1 I_0}{R_{i+1}} + \frac{K_0 I_1}{R_i} \end{bmatrix}. \quad (5.10.)$$

Átalakítva:

$$= mrR_{i+1} \begin{bmatrix} \frac{I_1 K_0}{R_{i+1}} + \frac{I_0 K_1}{R_i} & \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_i} \right) I_1 I_0 \\ \left( \frac{1}{R_{i+1}} - \frac{1}{R_i} \right) K_1 K_0 & \frac{K_1 I_0}{R_{i+1}} + \frac{K_0 I_1}{R_i} \end{bmatrix}. \quad (5.11.)$$

Az egyszerűség kedvéért fajlagos ellenállás helyett a fajlagos vezetőképességet ( $\sigma$ ) véve:

$$= \frac{mr}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 \sigma_{i+1} + I_0 K_1 \sigma_i & (\sigma_{i+1} - \sigma_i) I_1 I_0 \\ (\sigma_{i+1} - \sigma_i) K_1 K_0 & K_1 I_0 \sigma_{i+1} + K_0 I_1 \sigma_i \end{bmatrix}. \quad (5.12.)$$

Figyelembe véve a vezetőképesség infinitezimális változását, ezt a formát már könnyebb infinitezimális transzformációként felírni:

$$= \frac{mr}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 \Delta \sigma_i + \frac{\sigma_i}{mr} & \Delta \sigma_i I_1 I_0 \\ \Delta \sigma_i K_1 K_0 & K_1 I_0 \Delta \sigma_i + \frac{\sigma_i}{mr} \end{bmatrix}. \quad (5.13.)$$

Az átalakításoknál felhasználtam a módosított Bessel-függvények Wronski-determinánsának értékét [Abramowitz, 1965]:

$$\begin{vmatrix} I_0 & K_0 \\ I_1 & -K_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{mr}.$$

Elkülönítve a fajlagos vezetőképesség változástól függő tagot:

$$= \frac{mr}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_i}{mr} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_i}{mr} \end{bmatrix} + \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & K_1 I_0 \end{bmatrix} = \quad . \quad (5.14.)$$

Megjelenítve a transzformációban a fajlagos vezetőképesség lokális változását:

$$= \frac{mr}{\sigma_i + \Delta\sigma_i} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_i}{mr} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_i}{mr} \end{bmatrix} + \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & K_1 I_0 \end{bmatrix} = , \quad (5.15.)$$

beszorzás után:

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \end{bmatrix} + \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & K_1 I_0 \end{bmatrix} = . \quad (5.16.)$$

Azonos átalakításokkal az 5.7. formulában szereplő alakra jutottunk:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} I_1 K_0 - \frac{1}{mr} & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & K_1 I_0 - \frac{1}{mr} \end{bmatrix} = , \quad (5.17.)$$

azaz az identitás transzformációt elkülönítve azonosítható az együttható vektor lokális transzformációja. Felhasználva újra a módosított Bessel-függvények Wronski-determinánsát:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} -I_0 K_1 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & -K_0 I_1 \end{bmatrix} = . \quad (5.18.)$$

Tehát az együtthatók transzformációja felírható infinitezimális transzformáció sorozattal (az aktuális radiális felosztásra vonatkozó, ekvivalens a differenciaegyenlet formával):

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{i+1} \\ \Delta B_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{mr\Delta\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \begin{bmatrix} -I_0 K_1 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & -K_0 I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} = . \quad (5.19.)$$



A differenciákhoz tartozó rétegvastagság ebben a közelítésben az együtthatófüggvény mintavételi távolsága és a fajlagos ellenállás függvény mintavételi távolsága lesz ( $\Delta r$ ). A  $\Delta r$ -el osztva mindkét oldalt és zérushoz tartva, a határártmenettel az alábbi homogén differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial r} \\ \frac{\partial B}{\partial r} \end{bmatrix} = -\frac{mr}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \begin{bmatrix} -I_0 K_1 & I_1 I_0 \\ K_1 K_0 & -K_0 I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} \quad (5.20.)$$

Látható, hogy ebben a közelítésben az 5.7. összefüggésben szereplő,  $\varepsilon$ -nak megfelelő tag arányos a fajlagos ellenállás relatív változásával. Az egyenlet jobboldalának másik eleme a térerősség radiális komponensének  $m$ -térfrekvenciához tartozó spektrális eleme. Látható továbbá az együtthatók ( $A, B$ ) változása csatlóódik (5.20. egyenlet alapján):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial r} \\ \frac{\partial B}{\partial r} \end{bmatrix} = -\frac{I_0}{K_0} \cdot \quad (5.21.)$$

Az együttható megváltozás vektor, azaz ( $A(r), B(r)$ ) trajektória érintőjének iránya nem függ a fajlagos ellenállás lokális értékétől csak a nagysága. Az együttható vektor csak fajlagos ellenállás változáskor transzformálódik. A transzformációs mátrix szeparálható egy infinitezimális vektornyújtásra és forgatásra. A nyújtást, diagonális elemek  $-1/r$ -es jellegű –, míg a forgatást mértékét a  $K$  és  $I$  módosított Bessel-függvények viszonya jellemzi. Az egyenletrendszer mátrixa  $A$  és  $B$  összefüggése miatt szinguláris. A továbbiakban a direktfeladat megoldás kiindulópontját az 5.20. egyenlet jelenti.

Belátható, hogy a fenti egyenletrendszer a fajlagos ellenállás változás, mint perturbáció első rendjében adja a megoldást. Fogjuk fel a fajlagos ellenállás változást a réteghatáron, mint lokális perturbációt. Azaz:

$$\sigma_{i+1}(r) = \sigma_i + \lambda \sigma_{p1}(r). \quad (5.22.)$$

Az 5.22. egyenletet egy radiális zóna határán történő változásnak tekintjük és  $\lambda$  az ellenálláskontraszt értéke, mely szorozza a fajlagos vezetőképesség-változást leíró függvényt ( $\sigma_{p1}$ ). Az index a perturbáció rendjére utal. A perturbáció az együttható függvényeknél is perturbációt okoz. Másodrendig felírva:

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i + \lambda A_{p1}(r) + \lambda^2 A_{p2}(r) + \dots \\ B_{i+1} &= B_i + \lambda B_{p1}(r) + \lambda^2 B_{p2}(r) + \dots \end{aligned} \quad (5.23.)$$

Hanyagoljuk el a magasabb rendű tagokat, melyek csupán a fajlagos ellenállás nagy relatív változásainál lényegesek. Alkalmazva a határfeltételi egyenleteket a radiális zónahatároknál:

$$\begin{aligned} K_0 A_i + I_0 B_i &= K_0 (A_i + \lambda A_{p1}) + I_0 (B_i + \lambda B_{p1}) \\ \sigma_i [K_1 A_i - I_1 B_i] &= (\sigma_i + \lambda \sigma_{p1}) [K_1 (A_i + \lambda A_{p1}) - I_1 (B_i + \lambda B_{p1})] \end{aligned} \quad (5.24.)$$

Az 5.24. első egyenletből adódik – 5.21. összefüggéshez hasonlóan – az együttthatók perturbációinak aránya:

$$\frac{A_{p1}}{B_{p1}} = -\frac{I_0}{K_0} \quad (5.25.)$$

Míg a második egyenletből átalakításokkal kapjuk, hogy

$$K_1 A_{p1} - I_1 B_{p1} = -\frac{\sigma_{p1}}{\sigma_i} [K_1 A_i - I_1 B_i] . \quad (5.26.)$$

Belátható, hogy a magasabb rendű perturbációkra is fennáll:

$$\frac{A_{pn}}{B_{pn}} = -\frac{I_0}{K_0} , \quad (5.27.)$$

illetve:

$$K_1 A_{pn} - I_1 B_{pn} = \left[ -\frac{\sigma_{pn}}{\sigma_i} \right]^n [K_1 A_i - I_1 B_i] . \quad (5.28.a)$$

A perturbációk összegezhetők geometriai sorként, melynek eredménye:

$$K_1 A_p - I_1 B_p = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_{p1}} [K_1 A_i - I_1 B_i] . \quad (5.28.b)$$

Az 5.1. egyenlet perturbációs módszerrel történő megoldásánál is hasonló eredményre jutunk. A fajlagos ellenállás változását tartalmazó tagot perturbációként felfogva:

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathfrak{R}}{dr} - \lambda f(R(r)) \frac{d\mathfrak{R}}{dr} - m^2 \mathfrak{R} = 0 \quad (5.29.)$$

Az 5.29. egyenletben a Bessel-féle differenciáloperátorhoz a módosított egyenletben a fajlagos ellenállás változással arányos perturbáló operátor járul. Az összefüggésben  $f(R(r))$  a  $\lambda$ -val normált fajlagos ellenállás változás függvény. Az 5.29. egyenletbe az  $\mathfrak{R}$  perturbált formáját helyettesítve:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \lambda \mathfrak{R}_1 . \quad (5.30.)$$

Ekkor az első rendben perturbált potenciál  $r$ -től függő komponensére az alábbi inhomogén differenciálegyenlet adódik,  $\mathfrak{R}_0$  ismert megoldását behelyettesítve:

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathfrak{R}_1}{dr} - m^2 \mathfrak{R}_1 = -f(R(r)) \frac{d\mathfrak{R}_0}{dr} = f(R(r)) (A_0 K_1(mr) - B_0 I_1(mr)) m . \quad (5.31.)$$

Az inhomogén differenciálegyenlet jól demonstrálja, miként működik a perturbációs módszer. Az inhomogenitások másodlagos áramforrásként szerepelnek. Erősségüket a perturbáció helyén uralkodó áramsűrűség, és a perturbáció nagyságának szorzata adja. Magasabb rendű perturbációk esetén a másodlagos források terében keltenek harmadlagos forrásokat és így tovább. Az egyenletet például az állandók variálásának módszerével lehet megoldani. Ismerjük a homogén egyenlet lineárisan független megoldásait ( $K_0$  és  $I_0$ ):

$$\mathfrak{R}_h(r) = C_1 K_0(mr) + C_2 I_0(mr). \quad (5.32.a)$$

Lineárisan függetlenek, mert a Wronski-determinánsuk zérustól különbözik:

$$W(mr) = I_0(mr)K_1(mr) + K_0(mr)I_1(mr) = \frac{1}{mr}. \quad (5.32.b)$$

A másodrendű differenciálegyenlet megoldását a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása adja. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása az alábbi egyenletrendszerből származtatható:

$$\begin{aligned} C_1'(r)K_0(mr) + C_2'(r)I_0(mr) &= 0 \\ -C_1'(r)K_1(mr) + C_2'(r)I_1(mr) &= f(R(r))(AK_1(mr) - BI_1(mr)) \end{aligned} \quad (5.33.)$$

(Megjegyezzük 5.33. első egyenlete az együttható függvényekre kirótt mellékfeltétel, hogy elkerüljük a rájuk vonatkozó magasabb rendű derivált megjelenését.) Innen a keresett együttható függvények:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= \int mr'I_0(mr')[A_0K_1(mr') - B_0I_1(mr')]dr' \\ C_2(r) &= -\int mr'K_0(mr')[A_0K_1(mr') - B_0I_1(mr')]dr' \end{aligned} \quad (5.34.)$$

Ebből – ebben a közelítésben – az általános megoldás rögzített térfrekvencián:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(r) &= A_0(m)K_0(mr) + B_0(m)I_0(mr) + \\ &+ \lambda K_0(mr) \int mr'f(R(r'))I_0(mr')[A_0K_1(mr') - B_0I_1(mr')]dr' - \\ &- \lambda I_0(mr) \int mr'f(R(r'))K_0(mr')[A_0K_1(mr') - B_0I_1(mr')]dr' \end{aligned} \quad (5.35.)$$

A kétféle perturbációs megoldás között a különbséget az jelenti, hogy az 5.26. egyenletnél egy réteghatár jelentett perturbációt (lokális perturbáció), míg 5.35. esetében egy adott fajlagos ellenállás profil (perturbáló függvény) adódott az ismert megoldással rendelkező egyszerűbb eset (homogén eset) fajlagos ellenállás eloszlásához. Innen is felírható differenciálegyenletrendszer az együttható függvényekre, mely közel áll 5.20. egyenletrendszerhez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= mR I_0(mr) \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} (A_0 K_1(mr) - B_0 I_1(mr)) \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= -mR K_0(mr) \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} (A_0 K_1(mr) - B_0 I_1(mr)) \end{aligned} \quad (5.36.)$$

Rekurzióval ez esetben is előállíthatjuk a magasabb rendű közelítéseket. Az 5.36. kifejezés felhasználásával származtattam pszeudo-geometriai faktor függvényt (lásd. II. Függelék).

### 5.3. Az együtthatókra vonatkozó differenciálegyenlet rendszer megoldásának lehetőségei

A radiálisan inhomogén közegegre vonatkozó direktfeladat megoldásához az 5.20. differenciálegyenlet rendszert kell megoldani. Ha a fajlagos ellenállás relatív változása kicsi, akkor infinitezimális transzformációnak tekintve, a transzformáció elvégzéséhez integrálni kell a mátrix elemeket a szonda testtől a vizsgált radiális távolságig, érvényesítve a szonda felszínre kiróható peremfeltételeket. A peremfeltételek általában Neumann-típusúak, azaz felszíni áramsűrűsége, a potenciál gradiensére vonatkoznak.

A differenciálegyenlet ilyen formán nehezen oldható meg, mivel peremfeltétel csak az együttható vektor elemeinek lineáris kombinációjára adható. Ez nehezíti meg a korábban említett rekurzív megoldás alkalmazását is.

#### 5.3.1. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása Euler-módszerrel

A numerikus módszerek, pl. Euler-módszer, Runge-Kutta módszer alkalmazásának is fő problémája, hogy az együtthatókra külön-külön nem tudunk peremfeltételt előírni a szondatestnél, csak a lineáris kombinációjukra, az áramsűrűség radiális komponensének spektrális elemére. Ismert peremfeltételek mellett integrálhatnánk az 5.20. egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} A(m, r) &= A(m, r_0) + \int_{r_0}^r \frac{dA(m, r')}{dr'} dr' \\ B(m, r) &= B(m, r_0) + \int_{r_0}^r \frac{dB(m, r')}{dr'} dr' \end{aligned} \quad (5.37.)$$

A peremfeltétellel kapcsolatos probléma azonban áthidalható, ugyanis a fajlagos ellenállás változás véges tartományra korlátozódik ( $r_0$ - $r_v$ ). Ezen túl a  $B$  együttható függvénynek, mely az  $I_0$  módosított Bessel-függvény szorozója, zérus értéket kell felvennie, máskülönben nem biztosítható a potenciál végtelenbeli eltűnése. Így az  $r_v$ -nél nagyobb radiális távolságoknál az együttható vektor konstans és csak az  $A$  komponens különbözik zérustól.  $A(m, r_v)$ -re így tetszőlegesen nem zérus peremfeltételt előírhatunk. A probléma linearitása miatt a valós értékhez képesti eltérés az elektróda áramának eltérését okozza csak. Az iterációt pedig  $r_v$ -től kell indítani. Ennek az lesz a hatása a szonda testig ( $r_0$ -ig) történő  $r$  szerinti integrálásnál, hogy az elektród árama nem lesz egységnyi. Az integrálás végén (4.7. egyenlet alapján) az áramra kapott értékkel a kapott együttható függvényeket normálni kell (5.39.). Az iteráció felépítése (az  $mr_i$  argumentumok elhagyásával):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial r} \\ \frac{\partial B_i}{\partial r} \\ A_i \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 m r_i \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} (K_1 A_{i-1} - I_1 B_{i-1}) \\ -K_0 m r_i \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} (K_1 A_{i-1} - I_1 B_{i-1}) \\ A_{i-1} + \frac{\partial A_{i-1}}{\partial r} dr \\ B_{i-1} + \frac{\partial B_{i-1}}{\partial r} dr \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Az együttható függvények normálásánál használandó áramérték, mellyel az együtthatókat osztani kell, minden m-re (4.7. alaplán):

$$I(m) = \frac{2\pi^2 r_0 m}{R_0} [K_1 A(r_0) - I_1 B(r_0)]. \quad (5.39.)$$

### 5.3.2. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása az együttható mátrix közvetlen integrálásával.

Az egymást követő infinitezimális transzformációk eredménye egyetlen mátrix hatásaként is felírható. Ekkor a spektrális együtthatók kezdő értékeiből ezzel az ekvivalens mátrix segítségével kaphatjuk meg, adott radiális távolsághoz tartozó  $A(m)$  és  $B(m)$  értékeket:

$$\begin{bmatrix} A(m, r) \\ B(m, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(m, r) & N_{12}(m, r) \\ N_{21}(m, r) & N_{22}(m, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(m, r_0) \\ B(m, r_0) \end{bmatrix}. \quad (5.40.)$$

Az  $\mathbf{N}$  mátrix elemei az infinitezimális transzformációt meghatározó mátrix elemeinek integráljaként áll elő. A mátrix elemek közvetlen integrálása problematikus. Polinommal felírt fajlagos ellenállás profil esetében az integrálás különböző rendű és nehezen kezelhető Struve-függvényekre, illetve Meijer-függvényekre vezet:

$$N_{11} = \int_{r_0}^r \frac{mr I_0 K_1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} dr, \quad (5.41.a.)$$

$$N_{12} = - \int_{r_0}^r \frac{mr I_0 I_1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} dr, \quad (5.41.b.)$$

$$N_{21} = - \int_{r_0}^r \frac{mr K_0 K_1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} dr, \quad (5.41.c.)$$

$$N_{22} = \int_{r_0}^r \frac{mr K_0 I_1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} dr. \quad (5.41.d.)$$

Az említett nehézségek miatt a fenti integrálok kiértékelésén alapuló megoldást elvetettem.

### 5.3.3. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása a probléma transzformálásával

Az együttható függvények teréből, a probléma átttranszformálható a térerősség radiális komponensének spektrumába  $Es(r,m)$  és a potenciál spektrális  $Vs(r,m)$  komponensének terébe (5.2. ábra):

$$\begin{bmatrix} Vs(r,m) \\ Es(r,m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 & I_0 \\ K_1 & -I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(r,m) \\ B(r,m) \end{bmatrix} \quad (5.42.)$$

(Továbbiakban  $Es = Es(r,m)$  és  $Vs = Vs(r,m)$ .)

Így a megoldás első fázisában kiküszöbölhetők a módosított Bessel-függvények. Ha 5.20. egyenletrendszer első sorát  $K_1$ -el, másodikát  $-I_1$ -el szorozva és összeadom, akkor a következő adódik:

$$\frac{\partial A}{\partial r} K_1 - \frac{\partial B}{\partial r} I_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} Es. \quad (5.43.)$$

Ha 5.20. egyenletrendszer sorait  $K_0$ -al illetve  $I_0$ -al szorozzuk meg és így adjuk össze, ebből a következőt kapjuk:

$$\frac{\partial A}{\partial r} K_0 + \frac{\partial B}{\partial r} I_0 = 0. \quad (5.44.)$$

Azaz a derivált vektor merőleges a  $(K_0, I_0)$  vektorra. Így a potenciál spektrális komponensének radiális megváltozása (teljes derivált):

$$\frac{\partial Vs}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r} K_0 + \frac{\partial B}{\partial r} I_0 - mAK_1 + mBI_1 = -mEs. \quad (5.45.)$$

A térerősség spektrális elemének radiális megváltozása 5.43. egyenlet felhasználásával:

$$\frac{\partial Es}{\partial r} = mA \left( -K_0 - \frac{K_1}{mr} \right) - mB \left( I_0 - \frac{I_1}{mr} \right) + \frac{\partial A}{\partial r} K_1 - \frac{\partial B}{\partial r} I_1 = -mVs - \frac{1}{r} Es + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} Es. \quad (5.46.)$$

Megjegyezzük, hogy a térerősség spektrális komponense részben a fajlagos ellenállás radiális változása miatt változik, részben a radiálisan növekvő sugarú zónák miatt, míg a potenciál spektrális komponensének megjelenése a vertikális áramsűrűséggel hozható kapcsolatba. A transzformált probléma differenciálegyenlet-rendszere 5.45. és 5.46. egyenletek alapján:

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} Vs \\ Es \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ -m & \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vs \\ Es \end{bmatrix}. \quad (5.47.)$$

Kissé átalakítva:

$$\frac{dVs}{dr} = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ -m & \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ E_s \end{bmatrix}. \quad (5.48.)$$

Integrálva a fenti egyenletrendszer (**W**) mátrixát, kapjuk hogy:

$$W_1 = \int_{r_0}^r W dr = \begin{bmatrix} 0 & -m(r-r_0) \\ -m(r-r_0) & \ln\left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

(Ha Piccard-féle szukcesszív approximációval keresnénk a megoldást, akkor a rezolvens matriczans formában történő felírásának is ez lenne az elsőrendű közelítése). A speciális koordináta-transzformáció következményeként itt már nem beszélhetünk infinitezimális transzformáció sorozatról, meg kell vizsgálni a közvetlen integrálhatóság feltételét, azaz **W** és integráljának felcserélhetőségét [Rózsa, 1991]. Végezzük el a kétféle mátrixszorzást (5.48. és 5.49 alapján):

$$\begin{bmatrix} 0 & -m \\ -m & \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -m(r-r_0) \\ -m(r-r_0) & \ln\left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2(r-r_0) & -m \ln\left[\frac{Rr_0}{rR_0}\right] \\ -m(r-r_0) \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) & m^2(r-r_0) + \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] \end{bmatrix},$$

majd felcserélve:

$$\begin{bmatrix} 0 & -m(r-r_0) \\ -m(r-r_0) & \ln\left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -m \\ -m & \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2(r-r_0) & -m(r-r_0) \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \\ -m \ln\left(\frac{Rr_0}{rR_0}\right) & m^2(r-r_0) + \frac{d}{dr} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] \end{bmatrix}.$$

Láthatóan a nem diagonális elemek esetében van eltérés. Fejtsük sorba a deriváltat nem tartalmazó nem diagonális elemet  $r_0$  körül:

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{Rr_0}{R_0r}\right] &= \ln\left[\frac{R_0r_0}{R_0r_0}\right] + \frac{d}{dr} \left[ \ln \frac{R}{r} - \ln \frac{R_0}{r_0} \right]_{r=r_0} (r-r_0) = \\ &= 0 + \frac{d}{dr} \left[ \ln \frac{R}{r} \right]_{r=r_0} (r-r_0) \end{aligned}$$

Mely valóban a másik nem diagonális elem elsőrendbeli Taylor-közelítése, így közelítőleg teljesül a felcserélhetőség. A megoldáshoz vegyük **W** integráljának (5.49.) spektrálfelbontását. Ehhez először a sajátértékekre ( $\lambda$ ) vonatkozó karakterisztikus egyenletet kell megoldani:

$$-\lambda \left[ \ln\left[\frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0}\right] - \lambda \right] - m^2(r-r_0)^2 = 0. \quad (5.50.)$$

Innen a két sajátérték:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\ln \left[ \frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0} \right] \pm \sqrt{\ln \left[ \frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0} \right]^2 + 4m^2 (r - r_0)^2}}{2} = \frac{f \pm \sqrt{f^2 + 4m^2 (r - r_0)^2}}{2}, \quad (5.51.)$$

ahol:

$$f = f(r) = \ln \left[ \frac{R}{r} \frac{r_0}{R_0} \right].$$

Innen az első sajátértékhez kapcsolódó saját vektort meghatározó egyenletek:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 u_1 - m(r - r_0) u_2 &= 0 \\ -m(r - r_0) u_1 + \lambda_2 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.52.)$$

Így az első saját vektor komponensei:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= \frac{-f - \sqrt{f^2 + 4m^2 (r - r_0)^2}}{2m(r - r_0)} = -\frac{\lambda_1}{m(r - r_0)}. \end{aligned} \quad (5.53.)$$

A második sajátvektorra vonatkozó egyenletek:

$$\begin{aligned} -\lambda_2 v_1 - m(r - r_0) v_2 &= 0 \\ -m(r - r_0) v_1 + \lambda_1 v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.54.)$$

A második saját vektor, amely a mátrix tulajdonságaiból következően merőleges az elsőre:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{f + \sqrt{f^2 + 4m^2 (r - r_0)^2}}{2m(r - r_0)} = \frac{\lambda_1}{m(r - r_0)} \\ v_2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.55.)$$

A megoldás felépíthető a sajátvektorokból készített mátrix és a peremfeltételek segítségével:

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Vs(m, r_0) \\ Es(m, r_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vs(m, r) \\ Es(m, r) \end{bmatrix}. \quad (5.56.)$$

A saját vektor mátrixának determinánsa:

$$D = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (5.57.)$$

Építjük fel a megoldást lépésről-lépésre, az 5.56. egyenlet első két mátrixának szorzata:



$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} \\ \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_2} \\ \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

amit megszorozva a sajátvektorok mátrixának inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_2} \\ \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} \\ \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2} & \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_2} \\ \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{m(r-r_0)} e^{\lambda_2} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.59.)$$

Ezt kell  $V_s$  és  $E_s$  peremértékeivel beszorozni:

$$E_s(m, r) = V_s(m, r_0) \frac{1}{D} \frac{-\lambda_1}{m(r-r_0)} [e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}] + E_s(m, r_0) \frac{1}{D} \left[ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right]. \quad (5.60.)$$

A térerősség radiális komponensére a szonda felületén előírható peremfeltétel (4.7. egyenlet alapján) az egyítható vektoroktól függetlenül:

$$E_s(m, r_0) = \frac{IR}{2\pi^2 m r_0}. \quad (5.61.)$$

Innen  $V_s(m, r_0)$  az alábbi értékkel becsülhető:

$$V_s(m, r_0) = -\frac{IR}{2\pi^2} \ln(r_0). \quad (5.62.)$$

Látható, hogy a potenciál spektruma nem függ az  $m$  térfrekvenciától, így Dirac-delta spektrumát kapjuk az elektródánál. Így:

$$E_s(m, r) = \left[ -\frac{IR}{2\pi^2} \ln(r_0) \right] \frac{-\lambda_1}{Dm(r-r_0)} [e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}] + \frac{IR}{2\pi^2 r_0 m D} \left[ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right]. \quad (5.63.)$$

Összevonások után:

$$E_s(m, r) = \frac{IR}{2\pi^2 D m} \left\{ \frac{\lambda_1 \ln r_0}{(r-r_0)} [e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}] + \frac{1}{r_0} \left[ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right] \right\}. \quad (5.64.)$$

A  $B$ -re vonatkozó differenciálegyenlet integrálásával:

$$B = B_0 - \int_{r_0}^{rv} mr K_0(mr) \frac{dR}{dr} \frac{1}{R} Es(m, r) dr \quad (5.65.)$$

lesz. Mivel a  $B$  együttható függvény az  $I_0$  módosított Bessel-függvény együtthatója, így a végtelenben el kell tűnnie. Az 5.65. egyenlet alapján  $B_0$  kifejezhető:

$$B_0 = \frac{IR}{2\pi^2 D} \int_{r_0}^{rv} r K_0(mr) \frac{dR}{dr} \frac{1}{R} \left[ \ln(r_0) \frac{\lambda_1}{(r-r_0)} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) + \frac{1}{r_0} \left( \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right) \right] dr. \quad (5.66.)$$

A térerősség radiális spektrális komponensére felírt peremfeltételből  $A_0(m)$  már meghatározható, így a szondatest mentén mért potenciál felírható (lásd 4.7. képlet):

$$Es(r_0, m) = A_0(m) K_1(mr_0) - B_0(m) I_1(mr_0) = \frac{IR_0}{2\pi^2 mr_0}. \quad (5.67.)$$

Innen már kifejezhető a teljes potenciál a szonda felületen:

$$U(r, z) = U_{\text{hom}} + \int_0^{\infty} \left( B_0 \frac{K_0(mr_0)}{K_1(mr_0)} I_1(mr_0) + B_0 I_0(mr_0) \right) dm. \quad (5.68.)$$

Ismételten felhasználva a Wronski-determináns értékét:

$$U(r, z) = U_{\text{hom}} + \frac{IR_0}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{mr_0 K_1(mr_0)} \int_{r_0}^{rv} r K_0(mr) \frac{dR}{dr} \left[ \ln(r_0) \frac{\lambda_1}{r-r_0} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) + \frac{1}{r_0} \left( \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right) \right] dr \cos mzd m. \quad (5.69.)$$

Felcserélve az integrálok sorrendjét:

$$U(r, z) = U_{\text{hom}} + \frac{IR_0}{2\pi^2 r_0} \int_{r_0}^{rv} \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} \int_0^{\infty} \frac{K_0(mr)}{Dm K_1(mr_0)} \left[ \ln(r_0) \frac{\lambda_1}{r-r_0} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) + \frac{1}{r_0} \left( \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \right) \right] \cos mzd m dr. \quad (5.70.)$$

Az 5.70. formula tulajdonképpen egy gyűrűelektród sorozat potenciálját írja le az  $r_0$  sugarú szondatest mentén  $z$ -irányban, 5.20. egyenletek megoldását megadva tetszőleges folytonos radiális fajlagos ellenállás profilra.

A fenti kétdimenziós probléma a térerősség spektrális komponensének és a potenciál spektrális komponensének összefüggése alapján egydimenziósként is kezelhető. Ezekből az alábbi homogén integro-differenciálegyenlet írható fel:

$$\frac{\partial Es}{\partial r} = -m^2 \int Es - \frac{1}{r} Es + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} Es. \quad (5.71.)$$

Ebből újabb deriválással:

$$\frac{\partial^2 Es}{\partial r^2} = -m^2 Es + \frac{1}{r^2} Es - \frac{1}{r} \frac{\partial Es}{\partial r} - \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial R}{\partial r} \right]^2 Es + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial Es}{\partial r}. \quad (5.72.)$$

Elhanyagolva a fajlagos ellenállás kontraszt négyzetével jellemezhető tagot:

$$\frac{\partial^2 Es}{\partial r^2} = -m^2 Es + \frac{1}{r^2} Es - \frac{1}{r} \frac{\partial Es}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial Es}{\partial r}. \quad (5.73.)$$

A másodrendű tagok elhanyagolásával egy fajlagos ellenállás változóval perturbált Bessel-egyenlethez jutunk. Ennek megoldását is kereshetjük hatványsor alakban (ahogy 5.1. egyenlet esetében tettük). Lineáris fajlagos ellenállás profil esetén, ha a tengelymetszet elhanyagolható, ez az egyenlet is leegyszerűsödik:

$$r^2 \frac{\partial^2 Es}{\partial r^2} + r^2 m^2 Es - Es = 0. \quad (5.74.)$$

Ennek megoldása [Polyanin,1995]:

$$Es(r) = \sqrt{r} [C_1 J_\nu(mr) + C_2 Y_\nu(mr)], \quad (5.75.)$$

ahol:

$\nu = 0.5\sqrt{1+4}$ . Ennek felhasználásával nem foglalkozom (5.70. ebben az esetben is használható).

Zérushoz közeli térfrekvenciáknál, mely a nagyobb szondahosszaknál a spektrum leglényegesebb része, az 5.71. egyenletből kiindulva a következőt kapjuk:

$$\frac{dEs}{Es} = \left[ \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r} \right] dr. \quad (5.76.)$$

Átalakítva:

$$\frac{dEs}{Es} = \frac{d}{dr} \ln \frac{R}{r} dr. \quad (5.77.)$$

Így Es-re adódó megoldás  $r_0$  és  $r$  között integrálva:

$$Es(r) = \frac{Es(r_0)r_0}{R_0} \frac{R}{r}. \quad (5.78.)$$

Ezt 5.20. egyenletbe helyettesítve kapjuk a  $B$  együtthatóra vonatkozó differenciálegyenletet:

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{mR_0}{R} \frac{dR}{dr} \frac{Es(r_0)r_0}{R_0} \frac{R}{r} = -\frac{mK_0 Es(r_0)r_0}{R_0} \frac{dR}{dr}. \quad (5.79.)$$

Innen  $B_0$  együttható a végtelenbeli eltűnés miatt:

$$B_0 = \frac{mEs(r_0)r_0}{R_0} \int_{r_0}^{rv} K_0(mr) \frac{dR}{dr} dr. \quad (5.80.)$$

A peremfeltételek (4.7.) alapján  $A_0$ :

$$A_0 = \frac{IR_0}{2\pi^2 r_0 m K_1(mr_0)} + \frac{I_1(mr_0)}{K_1(mr_0)} \frac{I}{2\pi^2} \int_{r_0}^{rv} K_0(mr) \frac{dR}{dr} dr. \quad (5.81.)$$

Az együtthatókból kifejezhető a potenciál a végtelen vékony gyűrűelektródtól  $L$  távolságra a szonda felületén:

$$U(L, r_0) = U_{\text{hom}}(L, r_0) + \frac{I}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{mr_0 K_1(mr_0)} \int_{r_0}^{rv} K_0(mr) \frac{dR}{dr} dr \cos m L dm. \quad (5.82.)$$

A fenti 5.82. egyenlet tulajdonképp egy speciális geometriai faktor közelítés, melyben a hengerfelületek mentén levő inhomogenitások forrásként viselkednek.

### 5.3.4. Improprius integrálok numerikus kiértékelése

A levezetett megoldások legtöbbször improprius integrálok formájában állnak elő. Az integrandus egy aszimptotikusan exponenciálisan viselkedő függvény és egy szondahosszal összefüggő periódusú harmonikus függvény szorzata. Az improprius integrál kiszámításánál két problémát kell megoldani, egyrészt az integrandus mintavételezésénél figyelembe kell venni a harmonikus függvény periódusát. A nem megfelelő mintavételezés a megoldásban aliasing-jelenséget okoz. A másik probléma az integrál csonkolása. A frekvencia-tartományban végzett csonkolás a tértartományban sinus-cardinális jellegű oszcillációt okoz (konvolúció sinc-függvénnyel). Egyszerűbb esetekben (pl. homogén eset), könnyen meghatározható az integrandus aszimptotikus alakja, mely általában kiintegrálható. Ha az integrandus bonyolultabb alakú, akkor elég a lecsengése alapján egy küszöb értéket meghatározni. Ekkor az integrálás – és így az eredmény – hibáját ez az érték fogja meghatározni, azaz a harmonikus függvény a küszöbértékkel, mint amplitudóval vett értékei felsőhatárt jelentenek az integrandusra nézve. A hiba felső korlátja a fél periódus integrálja szorozva a küszöbértékkel.

### 5.4. Lyukhatás figyelembe vétele a direktfeladat megoldásban

A fűrőlyuk hatása nem kezelhető jól olyan modellel, ahol a radiális változások deriváltja viszonylag kis értékeket vehet fel. Az eddigi modell módosítása nélkül, a fűrőlyuk hatása úgy vehető figyelembe, hogy a lyukfalát nagyobb mereedségű egyenessel szimuláljuk. Jobb megoldás azonban, ha vegyes modellt alkalmazunk a radiális profil tekintetében és a lyukfalnál megengedjük a lépcsőfüggvény szerinti változást, oly módon hogy a kétféle megoldást határfeltételek alapján illesztjük. Ez esetben is felírhatók a határfeltételek az együttható függvények vektorának transzformációival. Az ehhez kapcsolódó mátrixok:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} K_0(md) & I_0(md) \\ K_1(md)\frac{1}{R_m} & -I_1(md)\frac{1}{R_m} \end{bmatrix}, \text{ mely a fűrőlyukra illetve} \quad (5.83a.)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} K_0(md) & I_0(md) \\ K_1(md)\frac{1}{R_{xo}} & -I_1(md)\frac{1}{R_{xo}} \end{bmatrix}, \quad (5.83b.)$$

mely az elárasztott zóna közvetlen lyukfal melletti régiójára vonatkozik. A fent definiált mátrixokkal az együttható vektorok kapcsolata:

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1, \quad (5.84.)$$

$$\text{ahol: } \mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}.$$

A transzformáció segítségével a szonda felületén előírt peremfeltételeket kell áttranszformálni a lyukfalra:

$$A_0 = \frac{IR_0}{2\pi^2 r_0 m K_1(mr_0)} + \frac{I_1(mr_0)}{K_1(mr_0)} B_0 = \frac{Es(r_0)}{K_1(mr_0)} + \frac{I_1(mr_0)}{K_1(mr_0)} B_0. \quad (5.85.)$$

Így az együttható vektor a fűrőlyuk tartományra a peremfeltétel segítségével felbontható az alábbi módon:

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} Es(r_0) / K_1(mr_0) \\ 0 \end{bmatrix} + B_0 \begin{bmatrix} I_1 / K_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.86.)$$

A transzformációs mátrix konkrét formája:

$$-mdR_{xo} \begin{bmatrix} \frac{I_1}{R_{xo}} & -I_0 \\ \frac{K_1}{R_{xo}} & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & I_0 \\ -\frac{K_1}{R_m} & \frac{I_1}{R_m} \end{bmatrix} = -mdR_{xo} \begin{bmatrix} \frac{I_1 K_0}{R_{xo}} + \frac{I_0 K_1}{R_m} & \frac{I_1 I_0}{R_{xo}} - \frac{I_0 I_1}{R_m} \\ \frac{K_1 K_0}{R_{xo}} - \frac{K_1 K_1}{R_m} & \frac{K_1 I_0}{R_{xo}} + \frac{K_0 I_1}{R_m} \end{bmatrix}, \quad (5.87.)$$

ahol  $d$  a lyukátmérő. 5.84.-be helyettesítve kapjuk, hogy:

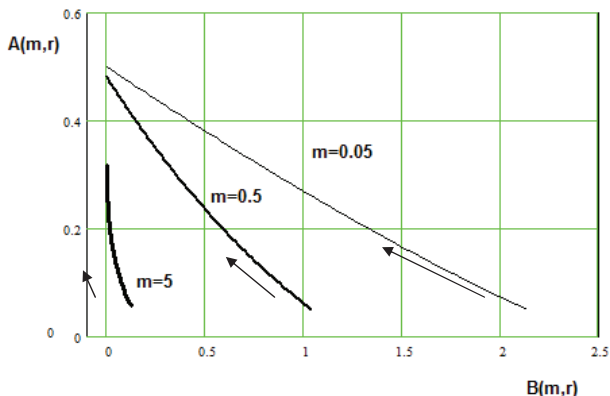
$$A_1 = -mdR_{xo} \left[ \frac{Es(r_0)}{K_1(mr_0)} \left( \frac{I_1 K_0}{R_{xo}} + \frac{I_0 K_1}{R_m} \right) + B_0 \left( \frac{I_1(mr_0)}{K_1(mr_0)} \left( \frac{I_1 K_0}{R_{xo}} + \frac{I_0 K_1}{R_m} \right) + \frac{I_1 I_0}{R_{xo}} - \frac{I_0 I_1}{R_m} \right) \right] \quad (5.88.a)$$

$$B_1 = -mdR_{xo} \left[ \frac{Es(r_0)}{K_1(mr_0)} \left( \frac{K_1 K_0}{R_{xo}} - \frac{K_0 K_1}{R_m} \right) + B_0 \left( \frac{I_1(mr_0)}{K_1(mr_0)} \left( \frac{K_1 K_0}{R_{xo}} - \frac{K_0 K_1}{R_m} \right) + \frac{K_1 I_0}{R_{xo}} + \frac{I_1 K_0}{R_m} \right) \right]. \quad (5.88.b)$$

Az 5.88. összefüggésben az  $md$  argumentumokat nem írtam ki. Az összefüggésben szereplő együttthatófüggvényeket kell peremfeltételként alkalmazni a differenciálegyenlet megoldásnál, ha fúrólyuk hatását is figyelembe kívánjuk venni.

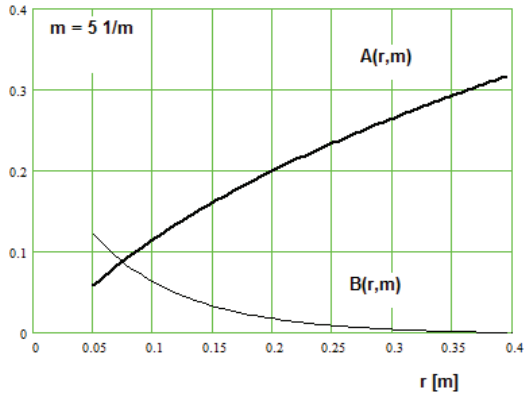
#### 5.4. Direktfeladat megoldások eredményei

A következőkben az 5.3. fejezetben leírt módon végzett direktfeladat megoldások eredményeit mutatom be. Először a spektrumot meghatározó együtttható függvények viselkedését tanulmányoztam egy lineáris fajlagos ellenállás profilú referencia modellen.

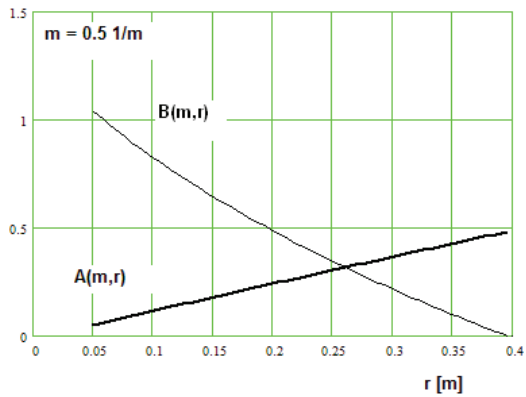


5.3. ábra. Különböző rögzített térfrekvenciák mellett számított együtttható függvény trajektóriák. (Lineáris fajlagos ellenállás profil,  $R_t = 10$  ohmm,  $D = 0.4$  m). A nyíl  $r$  növekedési irányát mutatja a trajektórián.

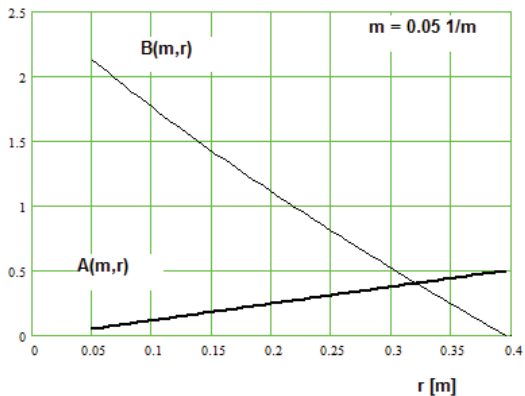
Az 5.3. ábrán a trajektóriák az elárasztási mélységet meghaladó radiális távolságoknál  $B(m,r)$  zérus értéket vesz fel. Látható továbbá, hogy az  $A(m,r_0)$  szondatestnél mért értékek közel azonosak, ami megkönnyíti a számításokat.



5.4.a. ábra. Az együttható függvények radiális változása  $m = 5 \text{ m}^{-1}$  térfrekvenciánál

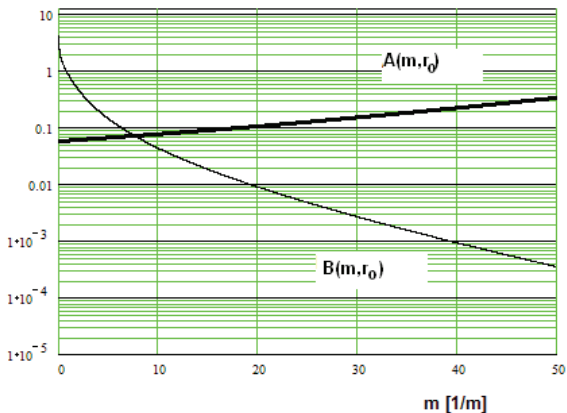


5.4.b. ábra. Az együttható függvények radiális változása  $m = 0.5 \text{ m}^{-1}$  térfrekvenciánál



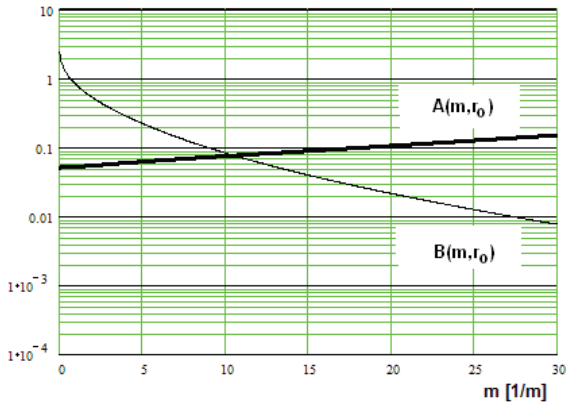
5.4.c. ábra. Az együtttható függvények radiális változása  $m = 0.05 \text{ m}^{-1}$  térfrekvenciánál

Az 5.4.a. – 5.4.c. ábrák szintén a térfrekvencia függvényében mutatják az 5.20. egyenlet megoldásaként kapott együtttható függvényeket. Jól látható, hogy kis térfrekvenciáknál erőteljesebb a radiális inhomogenitások hatását tükröző  $B(m,r)$  tag. Az  $A(m,r)$  jellege kevésbé változik és  $10 \text{ m}^{-1}$  térfrekvencia felett (a referencia modellnél) dominánssá válik.



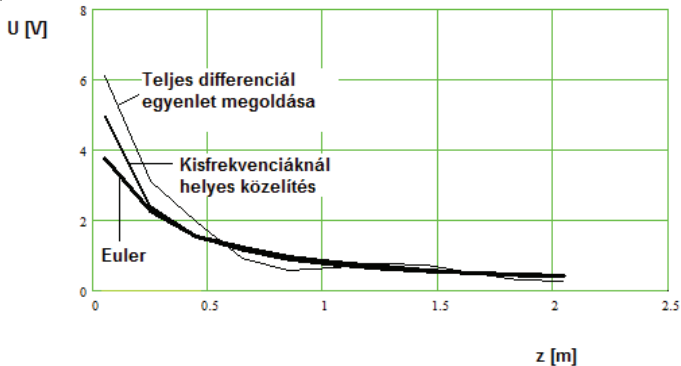
5.5.a. ábra. A szondatestnél számítható együtttható függvények (Euler-módszerrel)





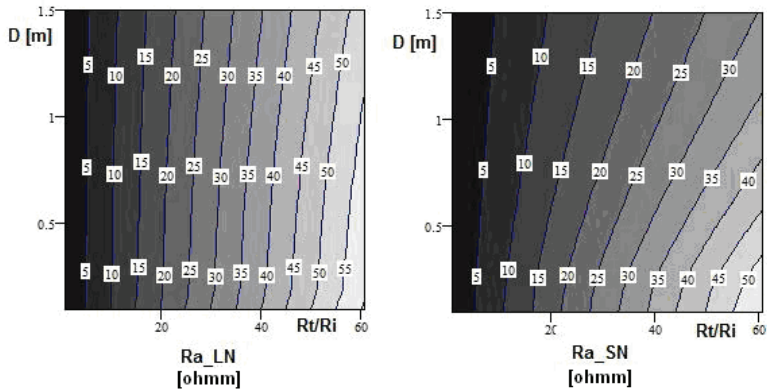
5.5.b. ábra. A szondatestnél számított együtttható függvények (5.66. egyenlet alapján)

Az 5.5. ábrákon az eltérő módszerrel kapott együtttható függvényeket mutatjuk be különböző térfrekvenciáknál. Megállapítható a jó egyezés.

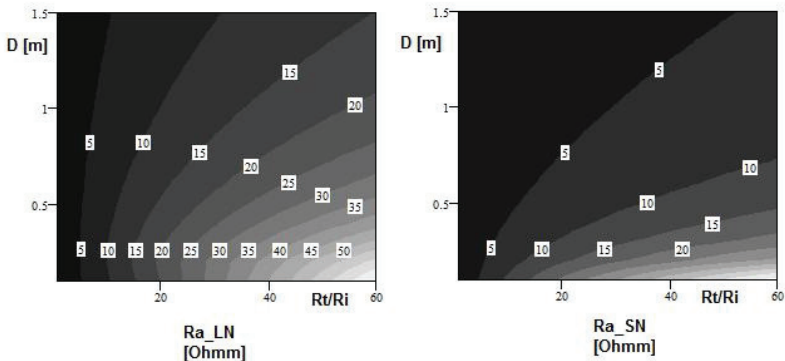


5.6. ábra. Különböző módszerrel kapott megoldások – szondatest mentén mérhető potenciálfüggvények - összevetése. ( $R_t/R_m = 10$  ohmm,  $D = 0.4$  m, lineáris fajlagos ellenállás profil mellett)

Az elektródtól távolabb – 0.4 m-nél messzebb – a különböző megoldások jól egyeznek. Az olajiparban használt szondák esetében ez megfelelő közelítés, mivel ennél rövidebb szondát általában nem alkalmaznak.



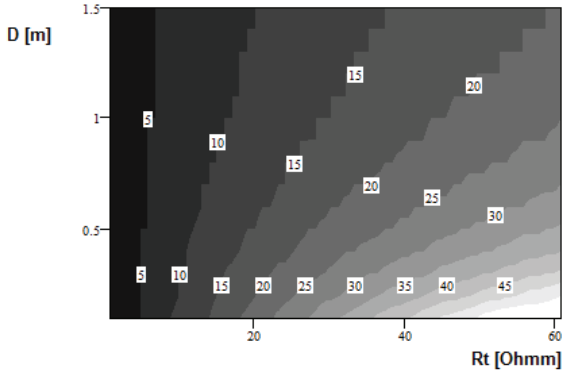
5.7.a. ábra. Látszólagos fajlagos ellenállások az  $(Rt/Ri - D)$  lineáris elárasztás profilú modelltér felett, 0.4 m-es (SN) és 1.6 m-es (LN) potenciálszondákra.



5.7.b. ábra. A 0.4 m-es és 1.6 m-es potenciál szondák látszólagos fajlagos ellenállás értékei lépcső függvény szerinti elárasztás profilok mellett.

Az 5.7a és 5.7b ábrán az SN és LN potenciálszonda látszólagos fajlagos ellenállás értékei láthatók, lépcsőfüggvény szerinti és lineáris profil mellett, értékeiben azonos jellegében különböző modelltér felett. Ahogy az várható, a lépcsőfüggvény esetében gyorsabb a látszólagos fajlagos ellenállás értékek lecsengése az elárasztás növekedésével. A kétféle

modelltér felett (5.1.b. ábra) számított látszólagos fajlagos ellenállásokat vizsgálva tetszőleges szondakombinációra, így az említett potenciálszonda konfigurációra is megállapíthatók a paraméterek közötti ekvivalenciák. Az ekvivalenciát az inverzió oldaláról közelítve, a 3.12. funkcionál segítségével közelítjük. Ekvivalens esetnek tekintjük a kétféle modelltér azon paraméter vektorait, amelyek esetében a számított látszólagos ellenállás vektorokra számított funkcionál értéke a mérések szórásnégyzetének nagyságrendjébe esik, azaz az adott mérés-kombináció alapján szignifikáns különbség nem állapítható meg. Ha a funkcionálban a mérések szórásnégyzeteit alkalmazunk súlyozásra, akkor az említett szignifikancia  $\chi^2$ -teszt alapján vizsgálható.



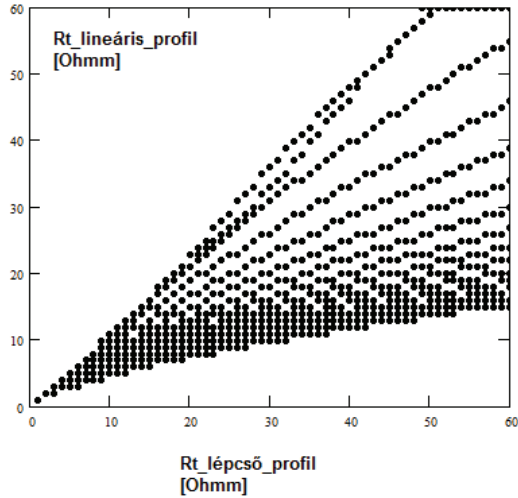
5.8. ábra. Ekvivalenciák a lépcsőfüggvény és lineáris profil között a SN és LN potenciál szonda kombináció terében.

Az ekvivalenciák esetében kiemelten foglalkozunk a leginkább hasonló esetekkel, ahol a funkcionálnak minimuma van. A következőkben evvel – a szűkebb értelemben vett ekvivalenciával – hasonlítom össze a kétféle modellteret.

Az 5.8. ábrán a rövid és hosszú normál kombinációra vonatkozó ekvivalenciák láthatók, azaz rögzített elárasztás mellett (y-tengely) és adott  $Rt$ -vel (x-tengely) jellemzett lépcsős profil esetén a szondákra számított látszólagos értékek milyen lineáris profilhoz kapcsolódó  $Rt$  értéknél adnak hasonló látszólagos értéket 5.89. funkcionál minimalizálásával.

$$\min_k Q_{i,j} = \sum_l \left( Ra_l^{\text{lépcső}}(Rt_i, D_j) - Ra_l^{\text{linear}}(Rt_i, D_k) \right)^2. \quad (5.89.)$$

Az eredmény a várakozásnak megfelelő: lineáris profil esetében kisebb  $Rt$  érték szolgálhat hasonló látszólagos értékeket.



5.9. ábra. A kétféle modell alapján számított  $Ra$  értékek alapján meghatározott modell paraméter ekvivalenciáknál az összetartozó  $Rt$  párokat tünteti fel az ábra.

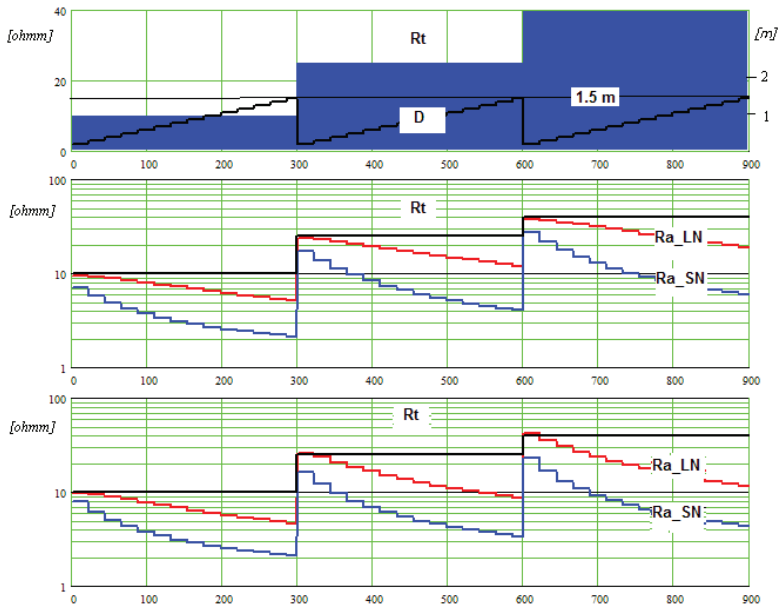
Az 5.9. ábrán látható ekvivalenciák esetében nem rögzítettük az  $Rt$  értékét (5.90. egyenlet).

$$\min_{k,m} Q_{i,j} = \left( Ra_i^{\text{lépcső}}(Rt_i, D_k) - Ra_i^{\text{linear}}(Rt_j, D_m) \right)^2 \quad (5.90.)$$

Az ábrán kirajzolódnak a különböző elárasztásokhoz tartozó vonalak. Kis elárasztások esetében nincs lényeges különbség a kétféle modellel meghatározott  $Rt$  értékek között.

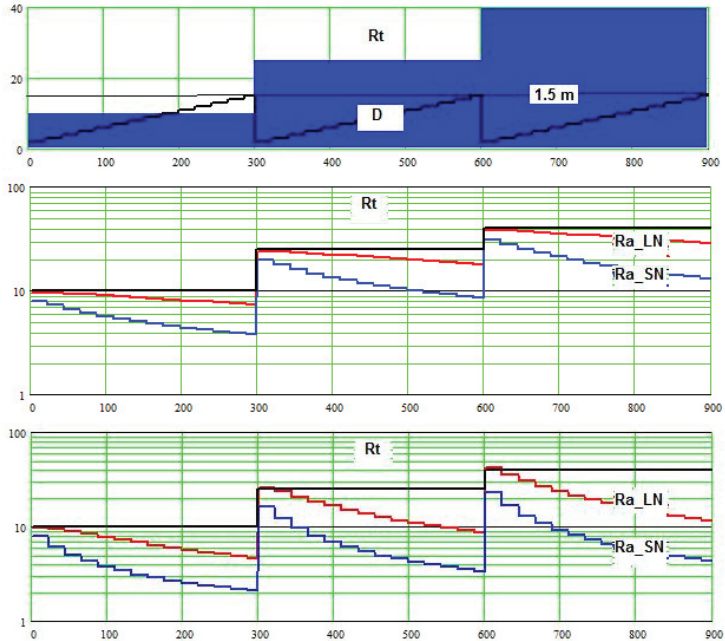
Nagyobb elárasztásoknál – hasonlóan az előző esethez – a lineáris profil kisebb  $Rt$  értékű modelljei adnak ekvivalens látszólagos értékeket (legkisebb négyzetes értelemben).

Hasonlítsuk most össze a direktfeladat megoldásokat úgy, hogy a folytonos profilra vonatkozó megoldásba a lépcsős profil függvényt helyettesítjük. Ez az  $r$  szerinti integrál leegyszerűsödéséhez vezet, hiszen az elárasztott zóna határán Dirac-delta függvényt kell az integrandusba helyettesíteni (5.70. egyenlet). Bár a lépcsőfüggvény nem folytonos profil, így nem felel meg a kiindulási feltételezéseknek, ennek ellenére a vizsgált modellek esetében a direktfeladat megoldás eredménye jól közelíti a lépcsőfüggvényre vonatkozó egzakt megoldást (5.10. ábra). Az ábrán minden pont más-más, a felső sávban látható modellelhez kötődő direktfeladat megoldás eredményét mutatja.



5.10. ábra. Ideális elárasztás modell mellett (felső grafikon) számított látszólagos fajlagos ellenállás görbék (SN és LN potenciál szondákra). A középső grafikonon a folytonos fajlagos ellenállás profilra kidolgozott közelítésbe helyettesített lépcsőfüggvény mellett számított, míg az alsón a lépcsős profil mellett egzakt megoldás látható.

Az ekvivalenciák a fenti modell segítségével is érzékeltethetők a kétféle modell között, ha az 5.10. ábrán levő összevetést elvégezzük lineáris és lépcső profilra (5.11. ábra). Látható, hogy a lineáris profilnál az elárasztással a látszólagos fajlagos ellenállás görbék lassabban csökkennek (5.11. ábra középső grafikon)



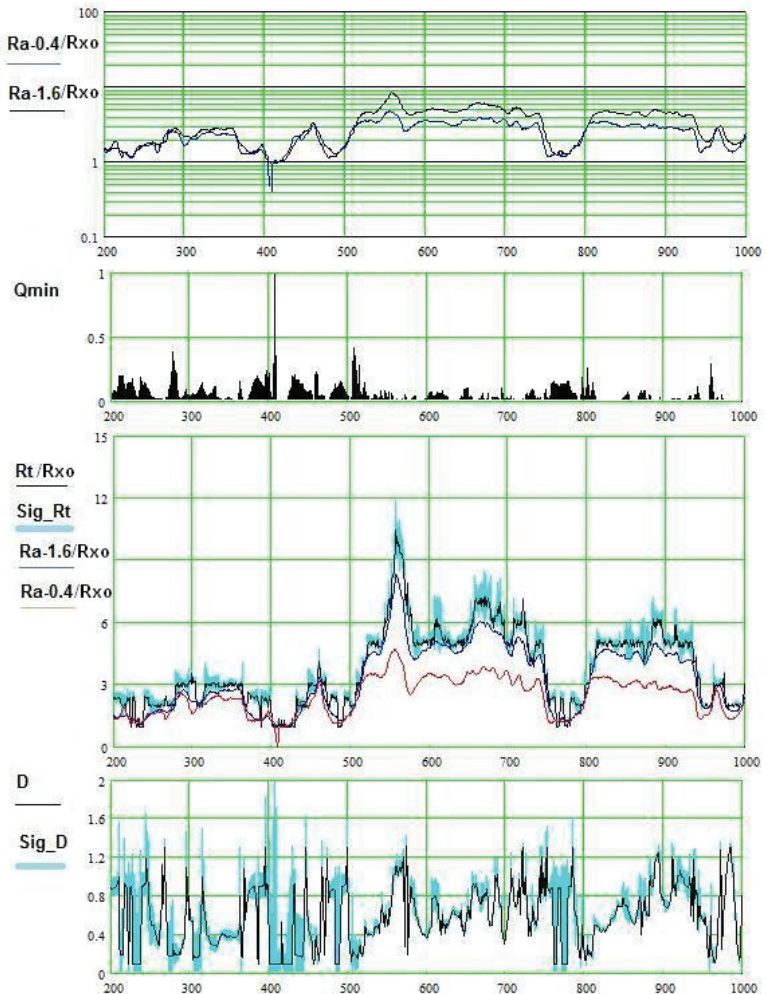
5.11. ábra. Ideális elárasztás modell mellett (felső grafikon) számított látszólagos fajlagos ellenállás görbék (SN és LN potenciál szondákra). A középső grafikonon lineáris profil feltételezése mellett számított, míg az alsón a lépcsős profil mellett egzakt megoldás látható.

## 5.5. Inverzió

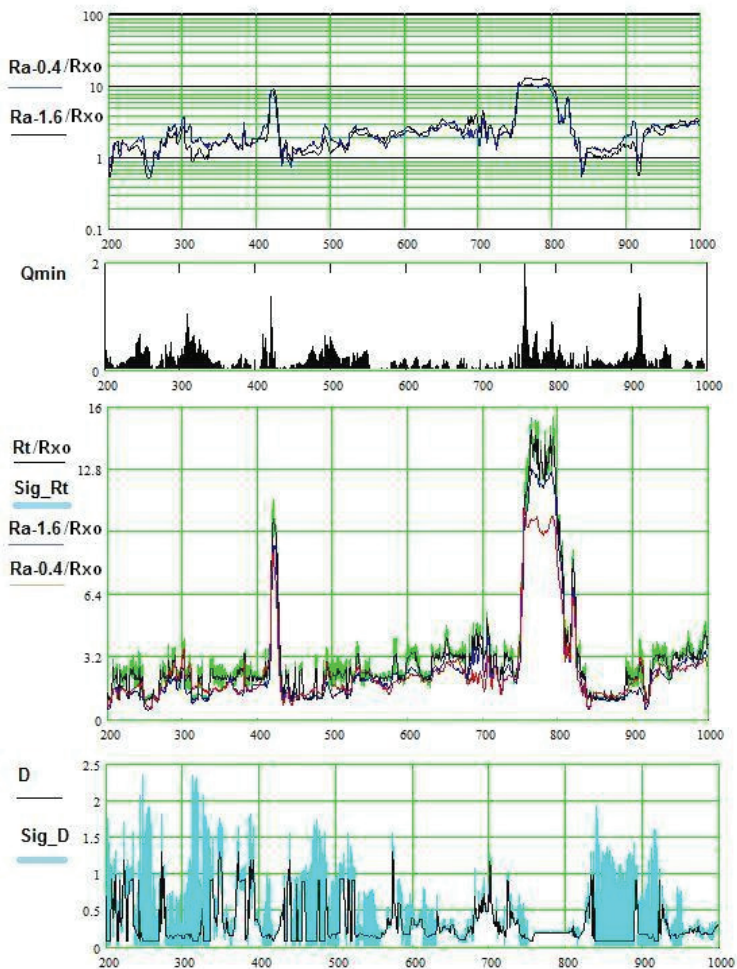
Ebben az alfejezetben a lineáris fajlagos ellenállás profil feltételezésével kapott direktfeladat megoldások segítségével végeztem inverziót. Az inverzió eredményét olajipari mérésekre, agyagos homokkő sorozatnál mért potenciálszonda (SN és LN) kombináció mérési eredményeire mutatom be (SN és LN értékeit a mikroszonda által mért  $R_{xo}$  értékkel normáltam). Az inverzió során a 3.8. formulával megadott funkcionált minimalizáltam a modelltér paraméterai felett. A lineáris profil feltételezés mellett végrehajtott inverziót összevetem a hagyományos lépcsőfüggvényre épülő kétréteges inverzióval. Mindkét modelltnél vertikálisan végtelen vastagságú réteg feltételezéssel éltem.

A legfontosabb paraméter ( $R_t$ ), mindkét modellnél az érintetlen zóna fajlagos ellenállását jelölte. Az elárasztás ( $D$ ) a lineáris profil esetében a változó fajlagos ellenállású szakasz külső sugarát jelöli, ahol a profilfüggvény eléri  $R_t$  értékét, a hagyományos modellnél az elárasztást szimbolizáló lépcső radiális pozícióját. Az 5.12. ábrán sekély elárasztású agyag-homokkő sorozatnál felvett mérések inverziója látható. Az ábra szerint az  $R_t$  becült szórása a réteghatároknál a legnagyobb, ahol a modell éppen a réteghatár effektusok miatt nem helytálló. A  $D$  elárasztási mélység szórása a nem elárasztott (márga) rétegeknél a legnagyobb. A leginkább megbízható eredményeket az elárasztott vastag rétegeknél kaptuk (750m –

800m). Az 5.13. ábrán ugyanennek a mérési sorozatnak kiértékelése látható lépcsőprofil feltételezésével. A permeabilis zónáknál a lépcsőfüggvény feltételezésével végzett inverziónál a négyzetes eltérések nagyobbak a kevésbé jó modellnek köszönhetően.

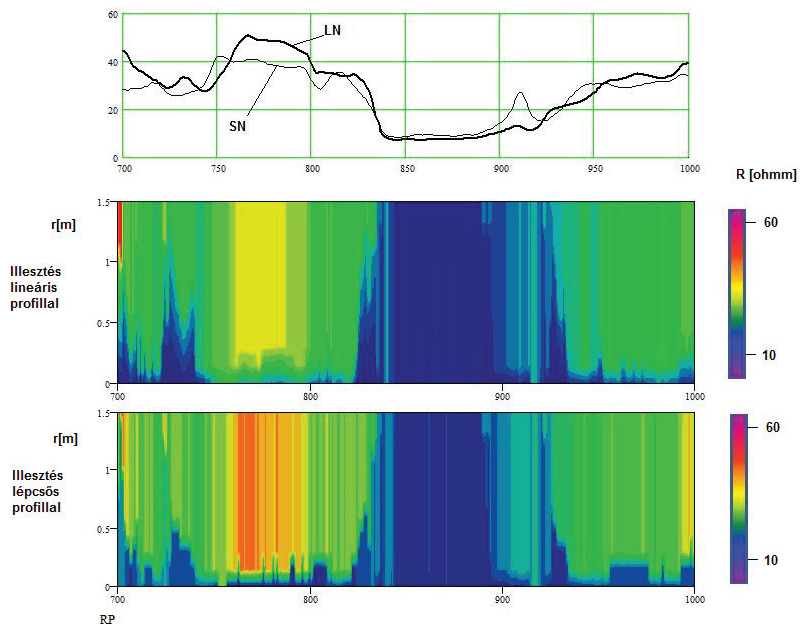


5.12. ábra. 1. méréssorozat. Potenciál sonda kombináció méréseinek inverziója sekély elárasztású agyag-homokkő sorozatnál lineáris profillal. Felül:  $R_{xo}$ -al normált mérési eredmények, alatta: az illesztéshez kapcsolódó négyzetes eltérés, alatta: illesztett  $R_t$ [ohmm], alatta: illesztett elárasztási mélység ( $D$ [m]).



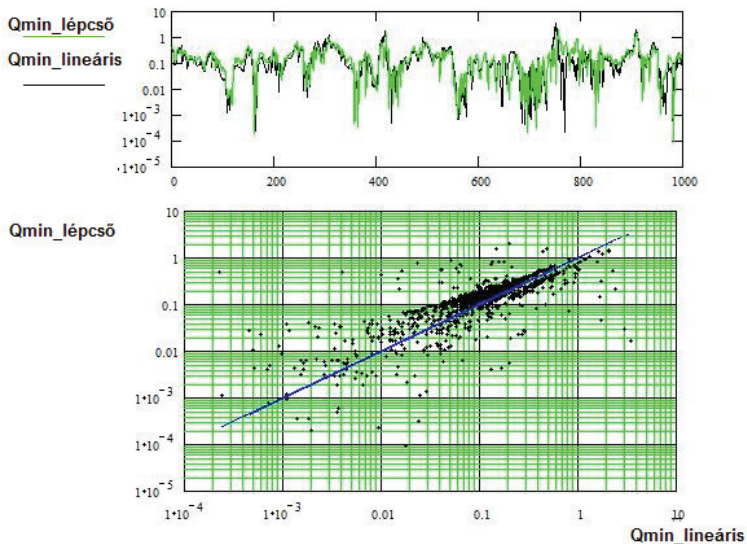
5.13. ábra. **1. méréssorozat.** Potenciál szonda kombináció méréseinek inverziója sekély elárasztású agyag-homokkő sorozatnál lépcső profillal. Felül:  $Rxo$ -al normált mérési eredmények, alatta: az illesztéshez kapcsolódó négyzetes eltérés, alatta: illesztett  $Rt[ohmm]$ , alatta: illesztett elárasztási mélység ( $D[m]$ ).





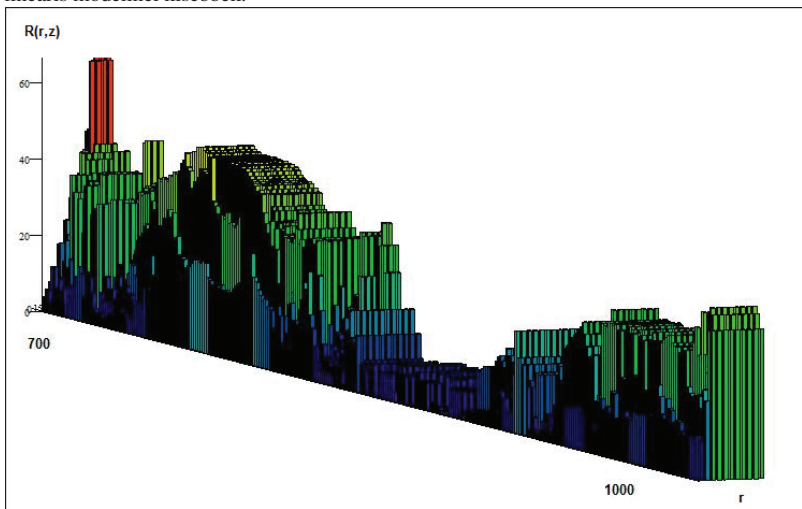
5.14. ábra. Az 1. mérőszorozat kiemelt szakaszán a kétféle módszerrel becsült radiális fajlagos ellenállás profil.

Az 5.14. ábrán látható, hogy a – várakozásnak megfelelően – kis elárasztásoknál a két módszer hasonló eredményt ad.



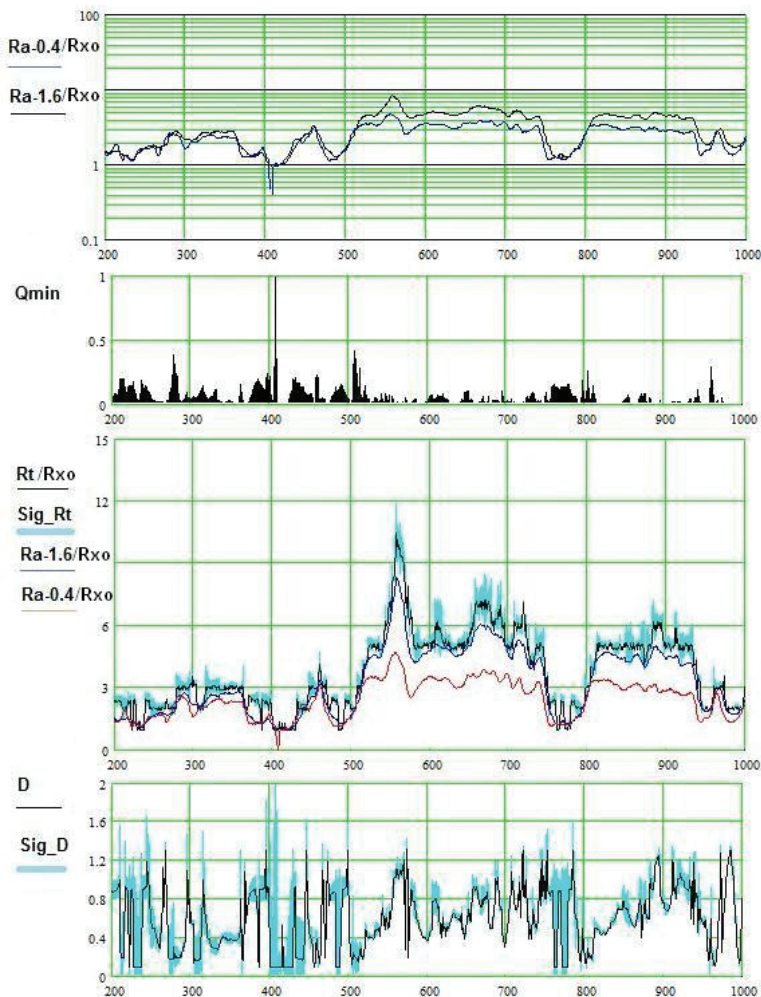
5.15. ábra. Az illesztéseknél kapott négyzetes eltérések összevetése.

Az 5.15. ábrán látható, hogy a hasonló eredmények ellenére, a négyzetes eltérések általában a lineáris modellnél kisebbek.

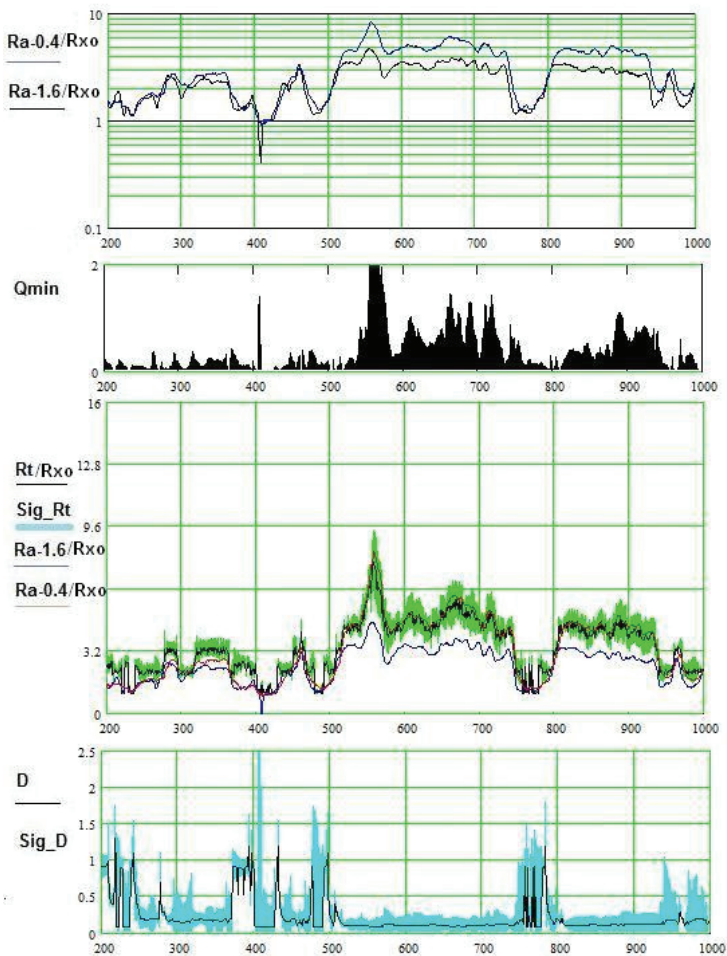


5.16. ábra. Az illesztett radiális fajlagos ellenállás profil a mélység függvényében. (1. mérési sorozat)

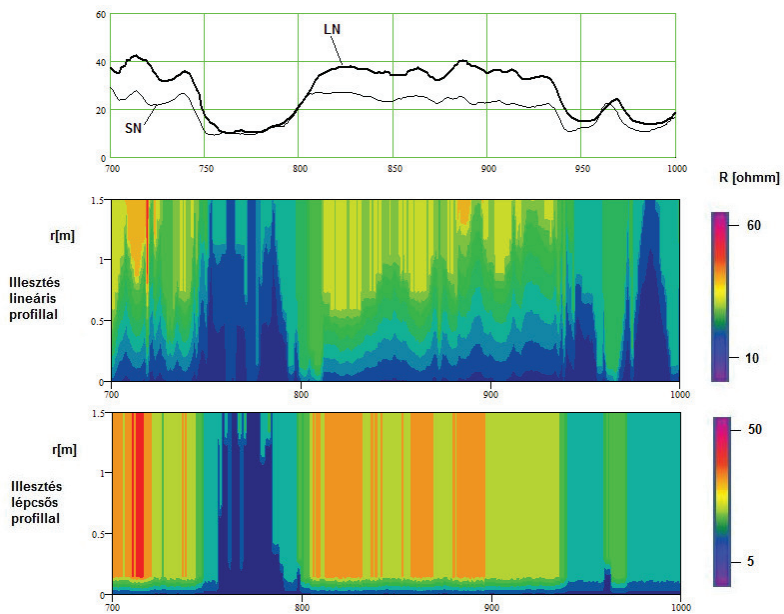
A 2. mérés sorozatnál, mélyebb elárasztású, kisebb permeabilitású tárolóknál végeztem el az inverziót (5.17, 5.18 ábra). A mélyebb elárasztásnál még szembetűnőbb, hogy a négyzetes eltérés jóval kisebb a lineáris profil esetén (5.20. ábra). A lineáris profil esetén a tárolón belüli elárasztás mélység változása is követhető.



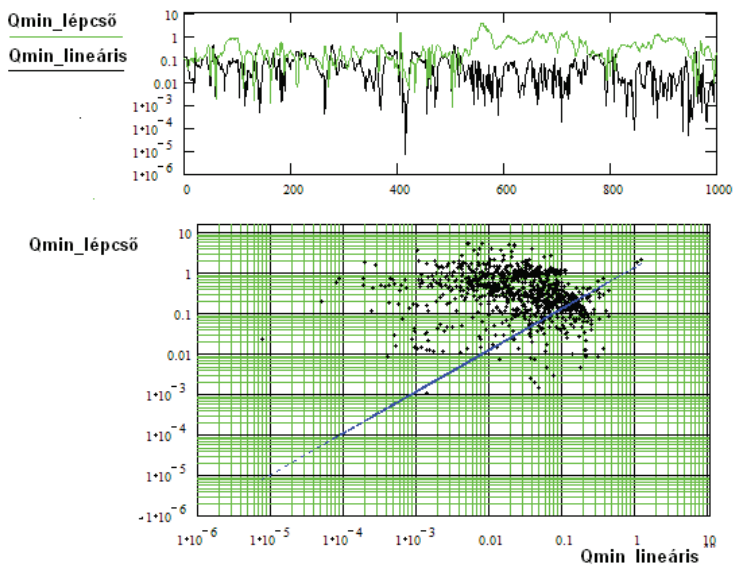
5.17. ábra. **2. méréssorozat.** Potenciál szonda kombináció méréseinek inverziója mélyebb elárasztású agyag-homokkő sorozatnál lineáris profillal. Felül:  $Rxo$ -al normált mérési eredmények, alatta: az illesztéshez kapcsolódó négyzetes eltérés, alatta: illesztett  $Rt$  [ohmm], alatta: illesztett elárasztási mélység ( $D[m]$ ).



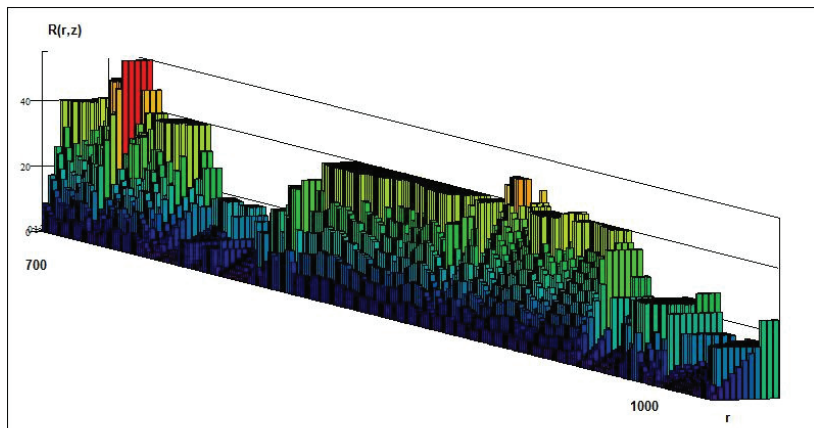
5.18. ábra. **2. méréssorozat.** Potenciál szonda kombináció méréseinek inverziója mélyebb elárasztású agyag-homokkő sorozatnál lépcső profilal. Felül:  $Rxo$ -al normált mérési eredmények, alatta: az illesztéshez kapcsolódó négyzetes eltérés, alatta: illesztett  $Rt$ , alatta: illesztett elárasztási mélység ( $D$ ).



5.19. ábra. Az 2. mérőszorozat kiemelt szakaszán a kétféle módszerrel becsült radiális fajlagos ellenállás profil.

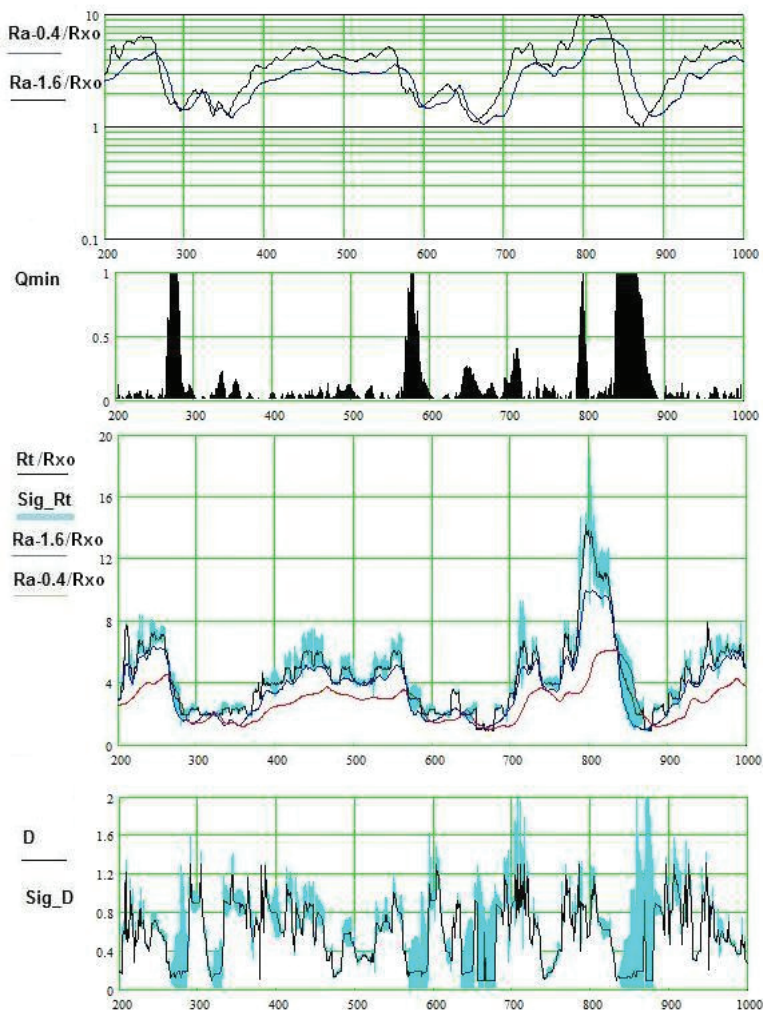


5.20. ábra. A négyzetes eltérések összevetése a kétféle illesztés esetében



5.21. ábra. Az illesztett radiális fajlagos ellenállás profil (2. mérősorozat részlete)

Az 5.22. ábrán közepes elárasztású rétegeknél végzett inverzió eredménye látható. A mérés sorozat azt demonstrálja, hogy a szelvények közötti mélység eltolódás jelentős illesztési hiba növekedést hoz be azokon az intervallumokon ahol jelentős változás van a szelvényeken.



5.22. ábra. **3. méréssorozat.** Potenciál sonda kombináció méréseinek inverziója közepes elárasztású agyag-homokkő sorozatnál lineáris profillal. Felül: Rxo-al normált mérési eredmények, alatta: Az illesztéshez kapcsolódó négyzetes eltérés, alatta: illesztett  $Rt$ , alatta: illesztett elárasztás ( $D$ ).

## 5.6. Konklúzió

Az 5. fejezetben többféle közelítésben és megoldási móddal végeztem el az elektromos problémára vonatkozó direktfeladat-megoldást radiálisan inhomogén közegre, mely pontosabban modellezi az elárasztott zónát. Lineárisan változó fajlagos ellenállás profilra vonatkozó eredményeket összevettem a hagyományos lépcsőprofilal számított eredményekkel egy korábban gyakran alkalmazott potenciálszonda kombináció (SN, LN) méréseinek terében. Általánosságban megállapítható, hogy az elárasztás növekedésével egyre jelentősebb a kétféle modellel számított szimulált adatok eltérése. A lineáris profil kisebb  $R_t$  értéke lesz ekvivalens a lépcsőmodell  $R_t$  értékével növekvő fajlagos ellenállás profil esetében. Az eredményeket felhasználtam az inverziós problémáknál, ahol az említett szondakombinációval történt mérések esetén végeztem inverziót (agyag-homokkő sorozatnál végzett olajipari méréseken). Itt is megállapítható volt, hogy a kisebb elárasztások esetén a kétféle közelítésből származó eredmények között nincs lényeges eltérés, míg mélyebb elárasztásoknál az eltérés jelentőssé vált. Az eltérés megnyilvánult a négyzetes eltérések esetében is, ahol a lineáris profillal végzett inverzió szolgáltatott kisebb illesztési hibát, feltételezhetően a modell jobb illeszkedésének köszönhetően.



## 6. Vertikális inhomogenitások hatása

Ebben a fejezetben a radiális inhomogenitások esetében alkalmazott megközelítést alkalmaztam vertikális inhomogenitások esetére. Az ilyen típusú eredmények alkalmasak pl. vertikálisan változó fajlagos ellenállású rétegeknél kialakuló potenciál számítására. A vertikális inhomogenitások esetére [Daniels, 1978] dolgozott ki rekurzív eljárást. Hengerszimmetrikus térben, radiális szimmetria mellett, a vertikális inhomogenitások figyelembevételére legalkalmasabb forma az általános megoldás tekintetében:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [A(m)e^{-m|z|} + B(m)e^{m|z|}] J_0(mr) dm. \quad (6.1.)$$

Az origóban elhelyezkedő pontforrás (Dirac-delta) terét:

$$U(r, z) = \frac{IR}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-m|z|}] J_0(mr) dm \quad (6.2.)$$

függvény írja le (Weber-Lipschitz integrál). Ha pontforrást helyezünk vertikálisan inhomogén térbe, a forrás környezetében ehhez kell tartania a megoldásnak. Azaz a forrást tartalmazó rétegben:

$$B(m) = -A(m) + \frac{IR}{4\pi}. \quad (6.3.)$$

A potenciálra (6.4.) és az áramsűrűség normális komponensére (6.5.) vonatkozó határfeltételi egyenletek egy réteghatárnál:

$$A^-(m)e^{-m|h|} + B^-(m)e^{m|h|} = A^+(m)e^{-m|h|} + B^+(m)e^{m|h|}. \quad (6.4.)$$

A normális áramsűrűségre vonatkozó egyenlet:

$$\frac{1}{R^-} [-mA^-(m)e^{-m|h|} + mB^-(m)e^{m|h|}] = \frac{1}{R^+} [-mA^+(m)e^{-m|h|} + mB^+(m)e^{m|h|}] \quad (6.5.)$$

Szimmetrikus differenciálforma mellett, azaz a folytonos függvény szerint változó fajlagos ellenállást a centrális érték körül sorbafejtve, a réteghatár alatti és feletti fajlagos ellenállás:

$$\begin{aligned} R^- &= R - \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ R^+ &= R + \frac{\partial R}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (6.6.)$$

Hasonlóan sorbafejtve az együtttható függvényeket is (perturbáció számítás első rendje):

$$\begin{aligned}
A^- &= A - \frac{\partial A}{\partial z} dz \dots B^- = B - \frac{\partial B}{\partial z} dz \\
A^+ &= A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \dots B^+ = B + \frac{\partial B}{\partial z} dz
\end{aligned} \tag{6.7.}$$

Az első határfeltételi egyenletbe helyettesítve:

$$\left( A - \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( B - \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} = \left( A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( B + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|}, \tag{6.8.}$$

átalakítás után:

$$-\left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{-m|h|} - \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) e^{m|h|} = \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{-m|h|} + \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) e^{m|h|}, \tag{6.9.}$$

tovább alakítva:

$$-\left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{-m|h|} = \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) e^{m|h|}. \tag{6.10.}$$

A fajlagos ellenállás változástól független összefüggést kapunk az együtthatók megváltozása közt. A 6.5. egyenletből:

$$\begin{aligned}
&\left( R + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \left[ -\left( A - \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( B - \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] = \\
&= \left( R - \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \left[ -\left( A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( B + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right]
\end{aligned} \tag{6.11.}$$

Elvégezve a beszorzást kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&\left[ -\left( AR - R \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( RB - R \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] + \\
&+ \left[ -\left( A \frac{\partial R}{\partial z} dz - \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( \frac{\partial R}{\partial z} dz B - \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] = \\
&= \left[ -\left( AR + R \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( RB + R \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] - \\
&- \left[ -\left( A \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( \frac{\partial R}{\partial z} dz B + \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right]
\end{aligned} \tag{6.12.}$$

Kiemelések után:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( R \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} - \left( R \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] + \\
 & + \left[ - \left( A \frac{\partial R}{\partial z} dz - \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( \frac{\partial R}{\partial z} dz B - \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] = \\
 & = \left[ - \left( R \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} + \left( R \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right] + \\
 & + \left[ \left( A \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} - \left( \frac{\partial R}{\partial z} dz B + \frac{\partial R}{\partial z} dz \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \right]
 \end{aligned} \tag{6.13.}$$

és további átalakítások és a kis tagok elhagyása után:

$$\left( R \frac{\partial A}{\partial z} dz - A \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) e^{-m|h|} = \left( R \frac{\partial B}{\partial z} dz - B \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) e^{m|h|} \tag{6.14.}$$

$$\left( R \frac{\partial A}{\partial z} - A \frac{\partial R}{\partial z} \right) e^{-m|h|} = \left( R \frac{\partial B}{\partial z} - B \frac{\partial R}{\partial z} \right) e^{m|h|} \tag{6.15.}$$

lesz. Ebbe beépíthető a 6.10. egyenlet, így:

$$R \frac{\partial A}{\partial z} e^{-m|h|} = A \frac{\partial R}{\partial z} e^{-m|h|} - R \frac{\partial A}{\partial z} e^{-m|h|} - B \frac{\partial R}{\partial z} e^{m|h|} , \tag{6.16.}$$

innen:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2R} \frac{\partial R}{\partial z} \left[ A - B e^{2m|h|} \right], \tag{6.17.}$$

illetve a komplementer egyenlet:

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{2R} \frac{\partial R}{\partial z} \left[ B - A e^{-2m|h|} \right] \tag{6.18.}$$

lesz. A radiális problémánál levezetett (5.20.) egyenletrendszerrel analóg differenciálegyenlet-rendszerre jutunk. A peremfeltételek pedig a következők:

A  $B(m)$  együttható függvény a forrástól távol zérushoz tart, míg a forrás közelében a két együttható függvény összege rögzített:

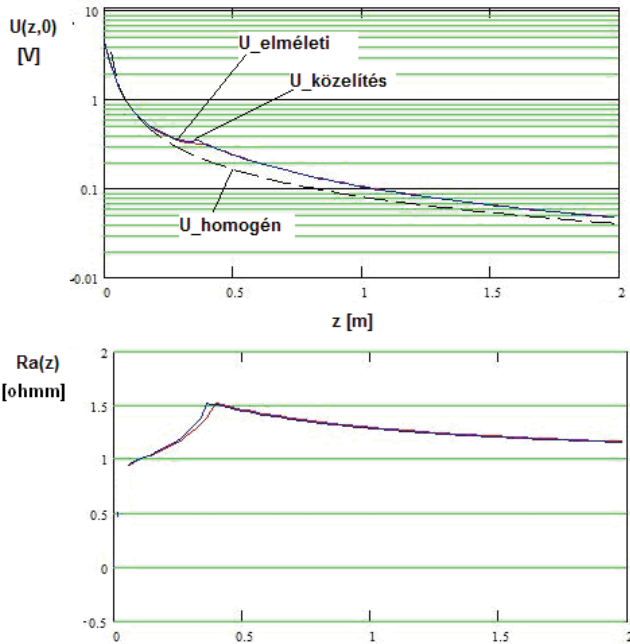
$$B_0(m) = \frac{IR}{4\pi} - A_0(m) . \tag{6.19.}$$

Az együttható függvények változása a fajlagos ellenállás változással a következő formában is megadható:

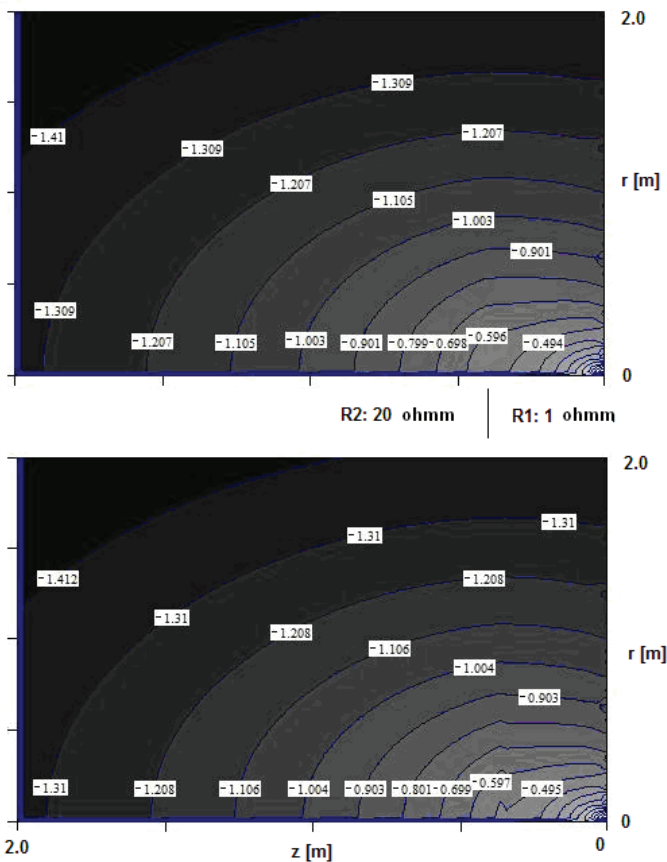
$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial z} e^{m|h|} \frac{1}{2} [Ae^{-m|h|} - Be^{m|h|}] \quad (6.20.a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial z} e^{-m|h|} [Be^{m|h|} - Ae^{-m|h|}] \quad (6.20.b)$$

A fenti szinguláris mátrixú egyenlet megoldható numerikusan, vagy infintezimális transzformáció sorozatként kezelve. A következőkben egy vertikálisan elhelyezkedő réteghatár esetére számítottam ki a potenciálfüggvényt, mely esetben az elméleti megoldással az eredmény összevethető. A 6.1. ábrán a kétféle megoldással számított potenciáeloszlás látható. Bár a közelítő megoldás legjobban lassú vertikális változások esetében használható, az egyezés itt is nagyon jó.

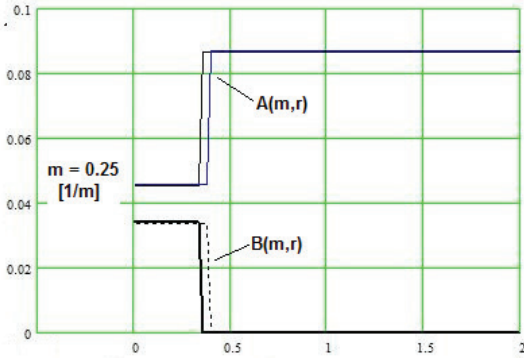


6.1. ábra. Potenciál eloszlás a z-tengely mentén és az abból származtatott látszólagos fajlagos ellenállás, egzakt és a 6.20. egyenletből származó megoldás összevetése. A pontforrás az originál, az egyetlen vertikális réteghatár 0.4 m-nél található. ( $R1$ : 1 ohmm,  $R2$ : 20 ohmm)

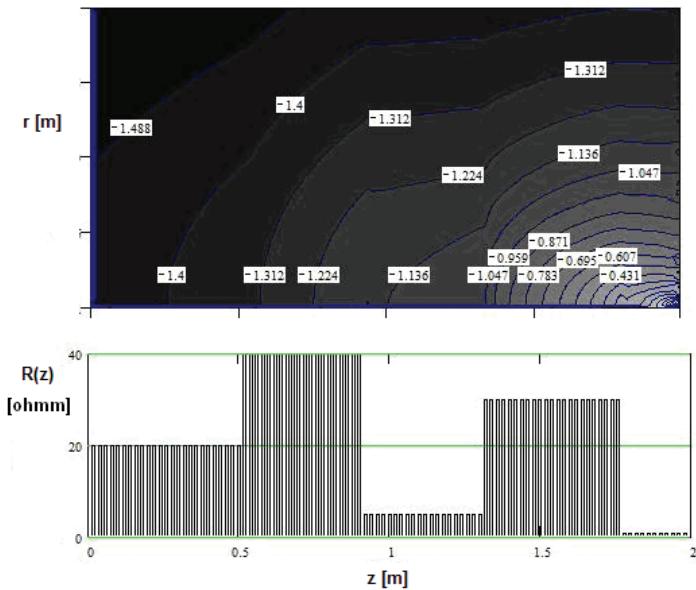


6.2. ábra. Vertikálisan elhelyezkedő réteghatár esetén kialakuló potenciáltér (logaritmus). Felül: egzakt megoldás, alul: a 6.20. egyenlet megoldásával kapott megoldás

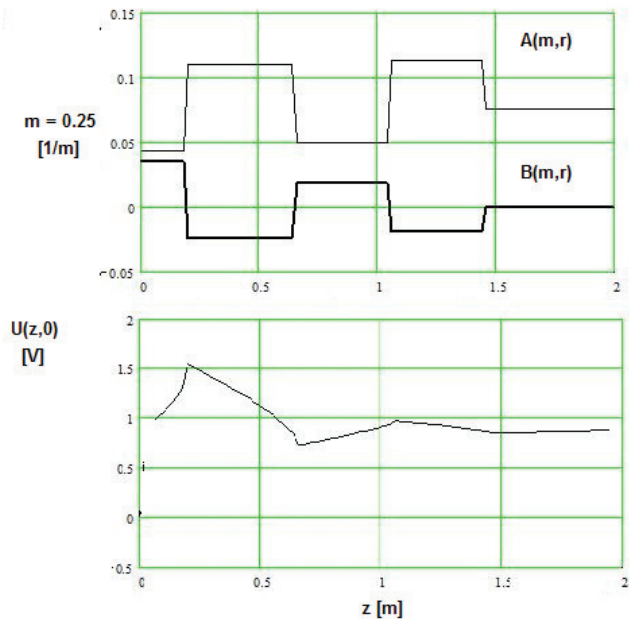
A 6.2. ábrán a kétféle megoldással kapott potenciál 2 dimenziós eloszlása látható. A 6.3. ábra a kétféle megoldással számított  $A(m,r)$  és  $B(m,r)$  együttható függvényt mutatja be, az említett kétréteges modellnél. A jó egyezés itt is megfigyelhető. A 6.4. ábra egy többreteges modellre számítható potenciáeloszlást jelenít meg.



6.3. ábra.  $A(m,r)$  és  $B(m,r)$  függvény a kétréteges modellre egy kijelölt térfrekvencián ( $0.25 \text{ m}^{-1}$ ). Az elméleti és a 6.20. egyenletből származó megoldás gyakorlatilag megegyezik.

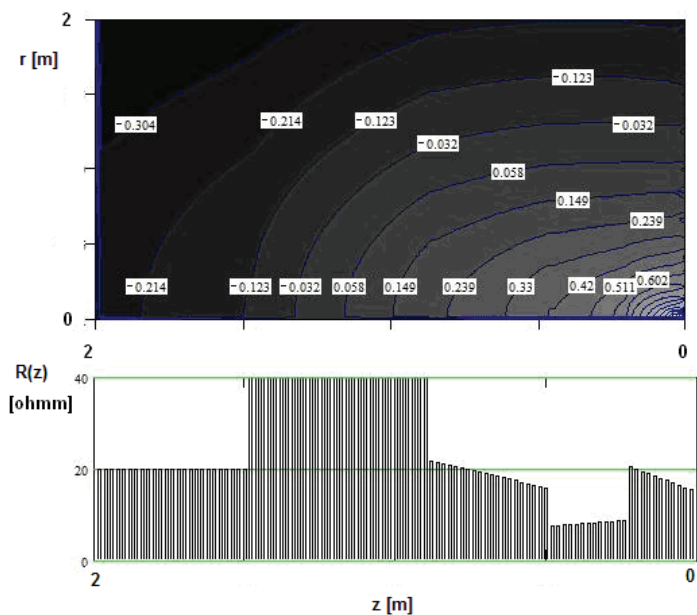


6.4. ábra. Potenciáeloszlás (logaritmusos) vertikálisan több réteg esetében, a 6.20. egyenlet alapján. A modell (a fajlagos ellenállás vertikális eloszlása) az alsó ábrán látható.



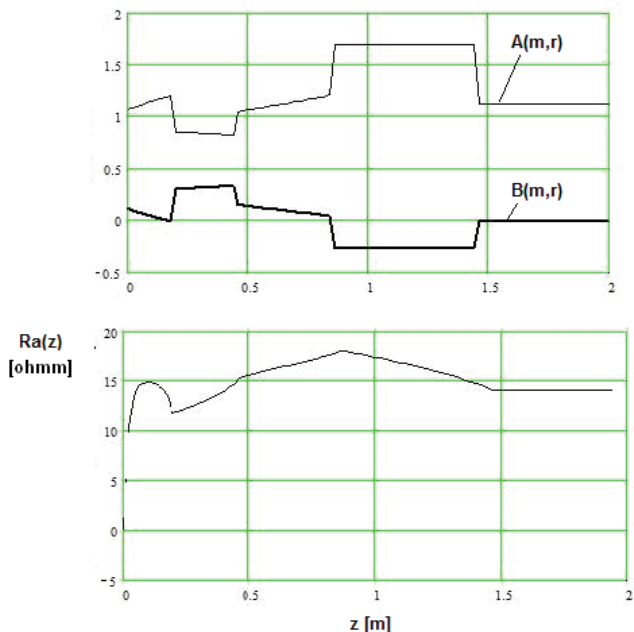
6.5. ábra. A 6.4. ábrán szereplő modellel számított  $A(m,r)$ ,  $B(m,r)$  függvény  $0.25 \text{ m}^{-1}$  térfrekvencián (felül) és a tengelymenti potenciál eloszlás (alul).

A 6.6. ábra vertikálisan többrétegű és rétegen belül változó fajlagos ellenállás eloszlás mellett mérhető potenciáeloszlást mutat be. A 6.7. ábrán példaként rögzített térfrekvenciához tartozó együttható függvények láthatók, valamint különböző szondahosszra a látszólagos fajlagos ellenállások. Az ábra szerint, hasonlóan a radiális inhomogenitások esetéhez, az együttható függvények korreláltnak változnak.



6.6. ábra. Vertikálisan rétegzett és a rétegeken belül is változó modellre vonatkozó kétdimenziós potenciáeloszlás (felül) és a modell (alul).





6.7. ábra. A 6.6. ábrán bemutatott modellnél számított  $A(m,r)$ ,  $B(m,r)$  együtthatók  $0.25 \text{ m}^{-1}$  térfrekvenciánál (felül), és a forrástól adott távolságra mért fajlagos ellenállás értékek (alul).

## 6.1. Konklúzió

Radiálisan inhomogén problémához hasonló eljárást mutattam be vertikális inhomogenitások kezelésére. Ebben az esetben a Hankel-transzformált formában felírt általános megoldás együttható függvényeire származtattam differenciálegyenlet-rendszert, melynek megoldásaként előállítottam vertikálisan inhomogén közegre a potenciált.

Összevettem a 6.20. egyenletben szereplő közelítő megoldást és az egzakt megoldást egyszerű esetben (két vertikális réteg esete). Az egyezés a kétféle megoldás között megfelelő volt. Majd különböző komplikáltabb vertikális inhomogenitások esetében végeztem el a direktfeladat megoldást, olyan esetre is mikor a rétegeken belül folyamatosan változik a fajlagos ellenállás.

## 7. Véletlen inhomogenitások hatása

Az előző fejezetekben az inhomogenitások kezelésénél fontos szerepe volt a perturbáció számításnak. Ebben a fejezetben, a véletlen kis kiterjedésű inhomogenitások hatásának vizsgálatában is alapvető szerepet játszik ez a módszer. Segítségével vizsgálhatóak a véletlen közegek effektív paraméterei, valamint a véletlen hatások – tulajdonképpen véletlen modellhibák – mérésekben való megjelenése.

Megjegyezendő, hogy a lokális perturbációk segítségével a szondák térbeli érzékenysége is vizsgálható, mely felhasználható szondatervezésnél és inverzfeladat megoldásoknál is. Elektromos problémák esetében kis kiterjedésű inhomogenitás hatásának számításához az alábbi parciális differenciálegyenletből indulhatunk ki:

$$\nabla[\sigma \nabla U(r, z, \varphi)] = S(r, z, \varphi). \quad (7.1.)$$

A forrás a szondatest felületén levő konstans potenciállal jellemezhető elektróda régiók. Ha a fajlagos vezetőképesség ingadozása kicsi, miközben az ingadozás mértéke (vezetőképesség kontraszt) rögzített ( $\lambda$ ) a fenti egyenlet a következőképpen írható fel:

$$\nabla \left[ \left( \sigma + \lambda \delta \sigma \right) \nabla \left( U_0(r, z, \varphi) + \sum_k \lambda^k \delta U_k \right) \right] = S(r, z, \varphi). \quad (7.2.)$$

Az alkalmazott függvény sorozat ( $\delta U_k$ ) a perturbációs megoldások általános formája. A megoldást az ingadozásmentes probléma megoldása körüli kis eltérés formájában keressük  $\lambda$  polinomjaként. Elvégezve a beszorzásokat:

$$\nabla \left[ \left( \sigma \nabla U_0(r, z, \varphi) + \sigma \sum_k \lambda^k \nabla \delta U_k + \lambda \delta \sigma \nabla U_0(r, z, \varphi) + \lambda \delta \sigma \sum_k \lambda^k \nabla \delta U_k \right) \right] = S(r, z, \varphi), \quad (7.3.)$$

$$\begin{aligned} & \sigma \Delta U_0 + \lambda \delta \sigma \Delta U_0 + \lambda \nabla \delta \sigma \nabla U_0 + \sigma \sum_k \lambda^k \Delta \delta U_k + \lambda \nabla \delta \sigma \sum_k \lambda^k \nabla \delta U_k + \lambda \delta \sigma \sum_k \lambda^k \Delta \delta U_k = \\ & = S(r, z, \varphi) \end{aligned} \quad (7.4.)$$

A forrás az inhomogén és a homogén probléma során megegyezik (nincs visszahatás), így:

$$\begin{aligned} & \lambda \delta \sigma \Delta U_0 + \lambda \nabla \delta \sigma \nabla U_0 + (\sigma + \lambda \delta \sigma) \sum_k \lambda^k \Delta \delta U_k + \lambda \nabla \delta \sigma \sum_k \lambda^k \nabla \delta U_k = \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7.5.)$$

Mivel  $\lambda$  választása tetszőleges lehet, a megfelelő polinom együtthatóknak el kell tűnnie:

$$\delta \sigma \Delta U_0 + \nabla \delta \sigma \nabla U_0 + \sigma \Delta \delta U_1 = 0. \quad (7.6.)$$

Megjegyezzük, hogy az első tag általában zérus, mert a perturbáció nem esik egybe a forrás régióval. (Ehhez az elektródnál kell változnia a belső ellenállásnak, nem ideális elektródnál ez persze elképzelhető):

$$\sigma \Delta \delta U_1 = -\nabla \delta \sigma \nabla U_0, \quad (7.7.)$$

azaz a perturbáció hatása első rendben Poisson-egyenlettel vehető figyelembe, melynek forrása a vezetőképesség perturbációjának, és a perturbálatlan megoldás gradienseinek szorzata (a lokális áramsűrűség). Nagyobb vezetőképesség kontraszt esetén nem tekinthetünk el a magasabb rendű tagoktól. Megvizsgálva tehát  $\lambda$  polinom további együtthatóit, a négyzetes tagok együtthatóiból:

$$\sigma \Delta \delta U_2 + \delta \sigma \Delta \delta U_1 + \nabla \delta \sigma \nabla \delta U_1 = 0. \quad (7.8.)$$

Átrendezve ismét Poisson-egyenlethez jutunk:

$$\sigma \Delta \delta U_2 = -\delta \sigma \Delta \delta U_1 - \nabla \delta \sigma \nabla \delta U_1, \quad (7.9.)$$

ebbe 7.7. összefüggést behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\sigma \Delta \delta U_2 = \delta \sigma \frac{\nabla \delta \sigma \nabla U_0}{\sigma} - \nabla \delta \sigma \nabla \delta U_1. \quad (7.10.)$$

Tehát a magasabb rendű közelítésre felírt egyenletnél, az eggyel kisebbrendű megoldás adja a forrás tagot, mely egy rekurzió lehetőségét nyújtja. A rekurzió általános formája:

$$\sigma \Delta \delta U_n = -\delta \sigma \Delta \delta U_{n-1} - \nabla \delta \sigma \nabla \delta U_{n-1}. \quad (7.11.)$$

Ez alapján látható, hogy az egyre magasabb rendű tagok miként építhetők fel rekurzióval. Megjegyezzük, hogy a magasabb rendű perturbációs hatás elsősorban összetett perturbációknál lényeges, mivel magasabb rendű komponens esetében a perturbáció nem hat vissza önmagára, kivéve azt a helyzetet, mikor a forrás nem ideális, mert ekkor a forrásra való visszahatással (pl. árameloszlás megváltoztatása) képes magára is hatni a perturbáció. (fontos észrevenni, hogy a magasabb rendű esetben a perturbált potenciáltér perturbációnál levő gradiense számít, ami kis kiterjedésű perturbációnál praktikusán zérus, hiszen ott maximum van). Mivel mindegyik egyenlet Green-függvénye ugyanolyan, ez azt is jelenti, hogy a megoldás konvolúció sorozattal építhető fel a homogén megoldásból.

## 7.1. Kis kiterjedésű perturbáció

Vizsgáljuk a perturbációs megoldás felépülését Descartes-koordinátákban, homogén térerősségű térben ( $E_x, 0, 0$ ), kiskiterjedésű perturbáció mellett. A Green-függvényt jelölje  $G(\mathbf{x})$ . Ekkor 7.7. egyenlet alapján:

$$\sigma \Delta \delta U_1 = \nabla \delta \sigma_x E_x. \quad (7.12.)$$

Innen a  $\delta U_1$  elsőrendű perturbációs függvény konvolúcióval kifejezve a tér egy  $x$  pontjában:

$$\delta U_1 = \iiint \frac{\nabla \delta \sigma_x E_x}{\sigma} G(\mathbf{p} - \mathbf{x}) d\mathbf{p}. \quad (7.13.)$$

A másodrendű tag egyenlete pedig:

$$\sigma \Delta \delta U_2 = -\delta \sigma \Delta \delta U_1 - \nabla \delta \sigma \nabla \delta U_1. \quad (7.14.)$$

Vizsgáljunk derékszögű koordináta-rendszerben egy kis kocka alakú perturbációt  $\mathbf{r}(x_p, y_p, z_p)$  vektor környezetében, azaz:

$$\delta \sigma(x, y, z) = \Delta \sigma \Pi(x_p, \Delta x) \Pi(y_p, \Delta y) \Pi(z_p, \Delta z). \quad (7.15.)$$

Itt  $\Pi(x_c, \Delta x)$   $x_c$  körül  $\Delta x$  kiterjedésű egységnyi magasságú négyszög függvényt jelöl, mely egy lokális inhomogenitást modellez. A 7.10. egyenlet szerint a forrástag felírásához szükséges a vezetőképesség gradiense, amely az alábbi:

$$\begin{aligned} & \Delta \sigma \Pi(y_p, \Delta y) \Pi(z_p, \Delta z) \left[ \delta \left( x - x_p + \frac{\Delta x}{2} \right) - \delta \left( x - x_p - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \mathbf{e}_x + \\ & + \Delta \sigma \Pi(x_p, \Delta x) \Pi(z_p, \Delta z) \left[ \delta \left( y - y_p + \frac{\Delta y}{2} \right) - \delta \left( y - y_p - \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \mathbf{e}_y + \\ & + \Delta \sigma \Pi(x_p, \Delta x) \Pi(y_p, \Delta y) \left[ \delta \left( z - z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) - \delta \left( z - z_p - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (7.16.)$$

A perturbáció homogén térben helyezkedik el, így az elsőrendű perturbációs tagot meghatározó differenciálegyenlet inhomogén tagja  $F(x, y, z)$ , amely a homogén tér gradienseval felírva:

$$F(x, y, z) = \Delta \sigma \left\{ \begin{aligned} & \Pi(y, y_p, \Delta y) \Pi(z, z_p, \Delta z) \left[ \delta \left( x - x_p + \frac{\Delta x}{2} \right) - \delta \left( x - x_p - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] E_x(x, y, z) + \\ & \Pi(x, x_p, \Delta x) \Pi(z, z_p, \Delta z) \left[ \delta \left( y - y_p + \frac{\Delta y}{2} \right) - \delta \left( y - y_p - \frac{\Delta y}{2} \right) \right] E_y(x, y, z) + \\ & + \Pi(y, y_p, \Delta y) \Pi(x, x_p, \Delta x) \left[ \delta \left( z - z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) - \delta \left( z - z_p - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] E_z(x, y, z) \end{aligned} \right\}. \quad (7.17.a)$$

Mivel a térerősségnek csak  $x$  irányú összetevője van, a fenti skalárszorzat egyszerűbb alakban:

$$F(x, y, z) = \Delta \sigma \left\{ \Pi(y, y_p, \Delta y) \Pi(z, z_p, \Delta z) \left[ \delta \left( x - x_p + \frac{\Delta x}{2} \right) - \delta \left( x - x_p - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] E_x \right\}, \quad (7.17.b.)$$

És ebből konvolúcióval kapható a perturbációs megoldás első tagja:

$$\begin{aligned}
U_1(x_d, y_d, z_d) = & \\
= \frac{\Delta\sigma}{\sigma} E_x \left( x_p - \frac{\Delta x}{2} \right) \iint_{y,z} \Pi(y, y_p, \Delta y) \Pi(z, z_p, \Delta z) G \left( x_p - \frac{\Delta x}{2} - x_d, y - y_d, z - z_d \right) dy dz - \\
- \frac{\Delta\sigma}{\sigma} E_x \left( x_p + \frac{\Delta x}{2} \right) \iint_{y,z} \Pi(y, y_p, \Delta y) \Pi(z, z_p, \Delta z) G \left( x_p + \frac{\Delta x}{2} - x_d, y - y_d, z - z_d \right) dy dz
\end{aligned} \quad (7.18.)$$

ahol  $\mathbf{r}_p$  a perturbáció centrum koordinátája és  $\mathbf{r}_d$  a mérőhelyé. A négyesőfüggvények korlátozzák a fenti integrált. Ha a mérőhely a perturbációtól távol van, 7.18. tovább egyszerűsíthető:

$$U_1(x_d, y_d, z_d) = -\frac{\Delta\sigma}{\sigma} E_x \Delta x \Delta y \Delta z G_x(x_d - x_p, y_d - y_p, z_d - z_p) . \quad (7.18.b)$$

A fenti gondolatmenet kis kiterjedésű gyűrű alakú inhomogenitás esetére, mely jól alkalmazható geometriai faktor függvények definiálásánál. 7.10. egyenlet alapján folytatható az eljárás. A teljes függvényt a különböző rendű perturbációk összegeként kaphatjuk meg. Az eljárásnak szemléletes háttere is van. A perturbációk másodrendű forrásként viselkednek. Magasabb rendben a másodrendű források terében újra forrásként jelennek meg és így tovább.

## 7.2. Több lokalizált perturbációs centrum esete

Ha térben több perturbációs centrumot helyezünk el, akkor ezek „összjátéka” alakítja ki a perturbált teret. Egymás terét is perturbálják, így magasabb rendben bonyolult tér alakulhat ki, különösen, ha a centrumokat egymáshoz közelítjük. (Megjegyezzük, hogy egy lokális inhomogenitás önmagában is összetett perturbáció, hiszen legalább egy növekedő és egy csökkenő szakaszból épül fel.) A rekurziós egyenletből több perturbációs centrum esetében:

$$\sigma \Delta \mathcal{U}_n = -\Delta \mathcal{U}_{n-1} \sum_i \delta \sigma_i - \nabla \mathcal{U}_{n-1} \sum_i \nabla \delta \sigma_i . \quad (7.19.)$$

Látható, hogy minként csatolódnak az egyes centrumok hatásai, ha a fenti kifejezésre úgy tekintünk, hogy az  $n-1$  rendű perturbáció eleve szumma formájában írható fel.

Megvizsgálva a különböző rendű közelítéseket, megállapíthatjuk, hogy az elsőrendű perturbáció még független hatások összege:

$$\sigma \Delta \mathcal{U}_1 = -\nabla U_0 \sum_i \nabla \delta \sigma_i . \quad (7.20.)$$

Ez a közelítés látható például a közetek leírásánál is alkalmazott Maxwell-modelben (Landau. 1986], de ilyennek tekinthető az elektromos szondák geometriai faktoros leírása is. A másodrendű perturbációs tagban már a kölcsönös hatások is megjelennek:

$$\sigma \Delta \mathcal{U}_2 = -\frac{\nabla U_0}{\sigma} \sum_i \sum_j \delta \sigma_i \nabla \delta \sigma_j - \nabla \mathcal{U}_1 \sum_i \nabla \delta \sigma_i \quad (7.21.)$$

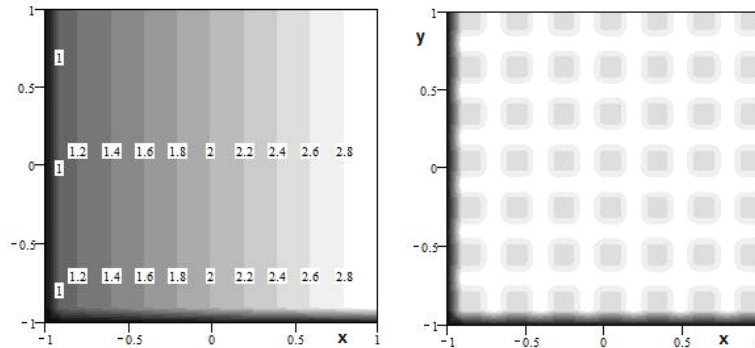
A probléma láthatóan analóg azzal, mintha különböző rendű tükröződésekkel próbálnánk meg leírni a potenciálteret. A tükröződések forrása mindig a lokális vezetőképesség kontraszt, a lecsengésnél a Green-függvény a meghatározó.

Ebből a megközelítésből az is látható, hogy helyes az az elképzelés, miszerint a bonyolult közegek leírásánál alapvető szerepet játszanak a perturbációs helyek eloszlásának különböző momentumai (1 pontos, 2 pontos eloszlás függvények). A 7.21. egyenletben a fajlagos vezetőképesség eloszlás függvényével és korrelációs függvényével várható értékre vonatkozó egyenlet írható fel. A véletlen közegek effektív paramétereit célzó kutatásoknál általában megállnak a fizikai paraméter eloszlását jellemző 2 pontos korrelációs függvénynél. A fenti gondolatmenet azt mutatja, hogy közeli perturbációs centrumok esetében lényeges lehet a magasabb rendű tag is, míg távoli centrumok esetében elégséges a független modell, azaz lehetséges, hogy jobb stratégia a térintegrál kiterjedésének korlátozása, de magasabb rendű tagok figyelembevétele.

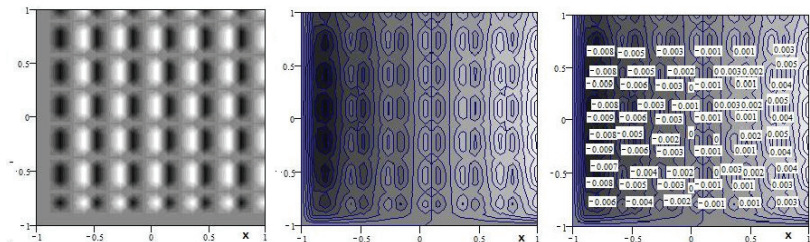
### 7.3. Példák a rekurziós perturbációs eljárásra

#### 7.3.1. Homogén x- irányú elektromos erőterbe helyezett rács

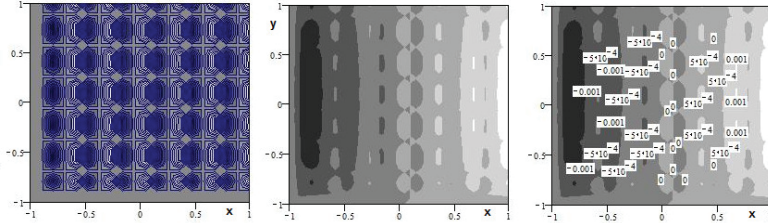
A perturbációs számításoknál,  $E_0$  homogén térerősség hat, 0,1 m-es rácsosztásban elhelyezett kocka alakú perturbációkra ( $R_p : 1.2$  ohmm, míg a perturbálatlan tér fajlagos ellenállása  $R_0 : 1$  ohmm volt). A perturbációk térfogati részaránya 34.3 % (7.1 ábra). Az elsőrendben perturbált potenciáeloszlást a 7.2. ábra mutatja. A  $\delta U_I$  ingadozása 0.05 körüli érték. A másodrendű perturbáció eredményei a 7.3. ábrán láthatók, míg a harmadrendű a 7.4. ábrán.



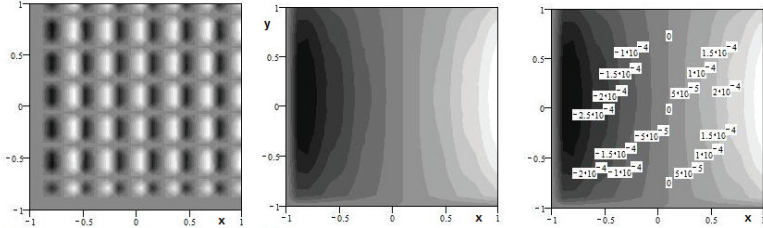
7.1. ábra. A perturbálatlan potenciáltér  $U(x)$  (baloldalt), az egyenletes rácsosztásban elhelyezett perturbációk (jobbalt).



7.2. ábra. Az elsőrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), az első rendben perturbált potenciáltér  $\delta U_1$  (középen, számértékekkel jobb oldalon),



7.3. ábra. A másodrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), a másod rendben perturbált potenciáltér  $\delta U_2$  (középen, számértékekkel jobb oldalon),

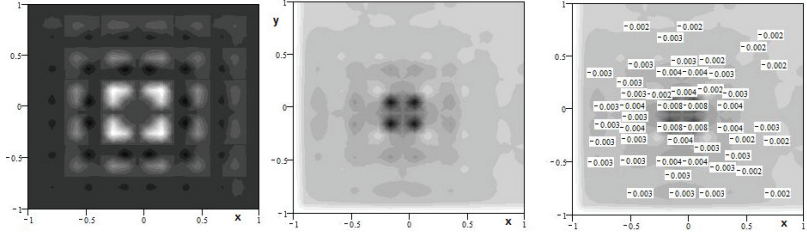


7.4. ábra. A harmadrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), a harmad rendben perturbált potenciáltér  $\delta U_3$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).

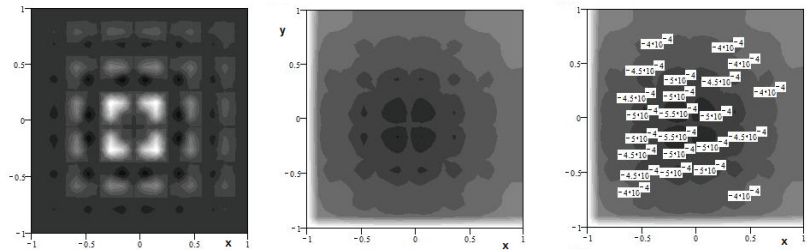
A számítás eredményeképp létrejött háromdimenziós perturbált potenciáltér átlagos paraméterei alapján kiszámítható a kocka fajlagos ellenállása, melyre 1.057 ohmm adódik, amely közelítőleg megegyezik azzal a fajlagos ellenállással melyet a komponensek párhuzamos kapcsolásával kapnánk (1.061 ohmm).

### 7.3.2. Centrális erőterbe helyezett rácsszerű perturbáció

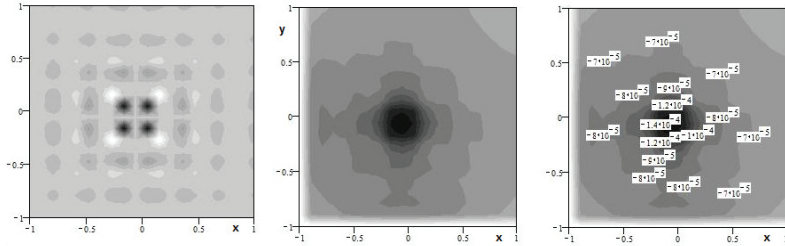
Ebben az alfejezetben pontforrás körül kialakuló tér módosulásait számítjuk, rácsszerűen elhelyezkedő perturbációk hatására. A perturbáló inhomogenitások paraméterei ugyanazok voltak, mint a 7.3.1. alfejezet modelljében. A centrális erőterben kialakuló elsőrendű perturbáció és forrását a 7.5. ábra mutatja.



7.5. ábra. Az elsőrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), az első rendben perturbált potenciáltér  $\delta U_1$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).



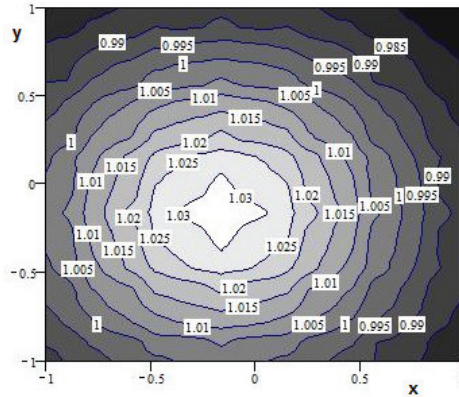
7.6. ábra. A másodrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), a másodrendben perturbált potenciáltér  $\delta U_2$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).



7.7. ábra. A harmadrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), a harmadrendben perturbált potenciáltér  $\delta U_3$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).

A 7.8. ábrán bemutatjuk, hogy az elhelyezett perturbáció különböző távolságokra, milyen eltérés okozna a látszólagos fajlagos ellenállásban. Látható, hogy a forrástól távolodva csökken a perturbáló hatás.

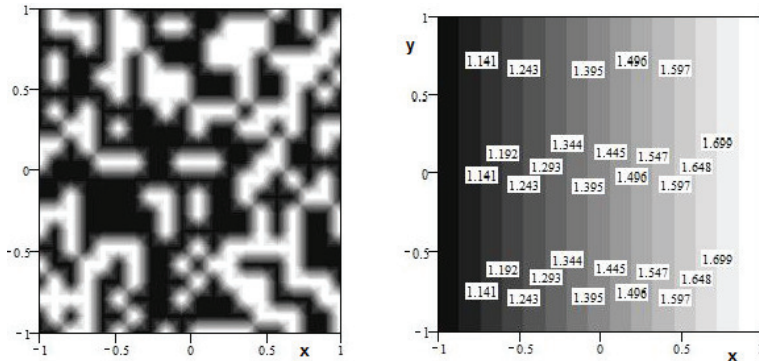




7.8. ábra. A perturbációk hatására bekövetkező potenciáltér torzulás hatása a mért látszólagos fajlagos ellenállás értékekre.

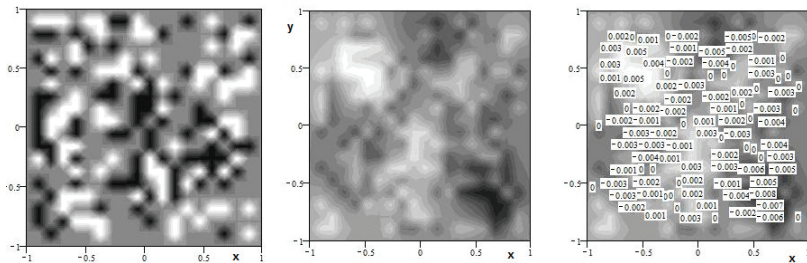
### 7.3.3. Perturbált tér véletlen közegben

Ebben az alfejezetben véletlen eloszlású perturbáció hatását vizsgáljuk. 2 ohmm-es fajlagos ellenállású homogén kockában véletlenszerűen 2.5 ohmm-es inhomogenitások helyezkednek el. A perturbáló anyag térfogati részaránya 41%. A kezdeti elektromos teret, homogén térerősség jellemzi (7.9. ábra)

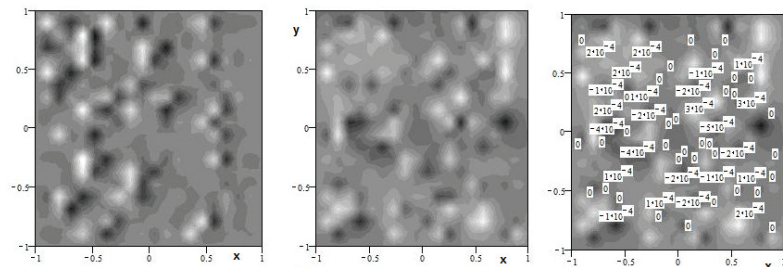


7.9. ábra. A véletlen eloszlású szemcsék X-Y metszetben (baloldalt), a nem perturbált potenciáeloszlás (jobb oldalon).

Az elsőrendű és a másodrendű perturbáció eredményei a 7.10. és 7.11. ábrán láthatók.

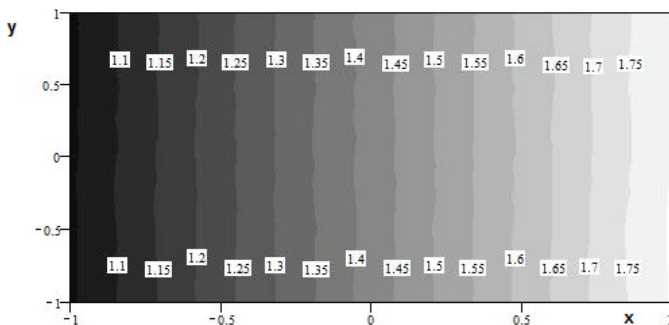


7.10. ábra. Az elsőrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), az első rendben perturbált potenciáltér  $\delta U_1$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).



7.11. ábra. A másodrendű perturbáció forrástagjának eloszlása (baloldalt), a másodrendben perturbált potenciáltér  $\delta U_2$  (középen, számértékekkel jobb oldalon).

A 7.12. ábrán a kialakuló potenciáltér fluktuációi követhetők nyomon. Látszik, hogy ilyen fajlagos ellenállás kontraszt esetén az áramtér iránya még alig ingadozik



7.12. ábra. A perturbált potenciáltér a kocka X-Y metszetében ( $U(x,y)$ )

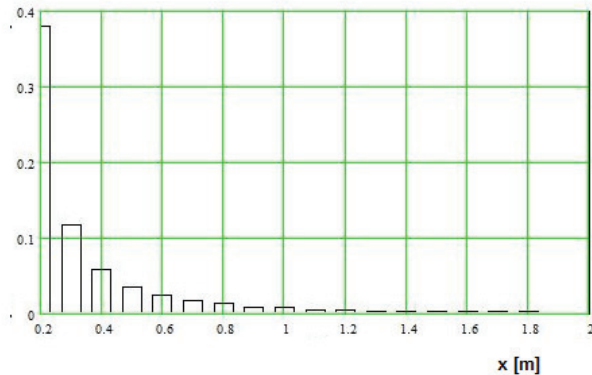
A fenti modellen számított potenciál különbség és átlagos áram érték alapján az eredő fajlagos ellenállás 2.19 ohmm méter. A párhuzamos kapcsolás esetén 2.18 ohmm, sorba kapcsolással 2.205 ohmm kapható eredő ellenállásnak (ezek alsó és felső korlátot is jelentenek). Maxwell-moddelllel (perturbáció első rendje) 2.187 ohmm kapható ekvivalens értéknek. Bebizonyítható, hogy homogén eloszlású perturbációk esetén a keverékre – első rendben – a következő additivitás érvényesül [Landau, 1986]:

$$\sigma_{kev}^{1/3} = \overline{\sigma^{1/3}} \quad (7.22.)$$

A fenti modellre 7.22. egyenlet alapján ugyancsak 2.187 ohmm adódik.

A jó egyezés mutatja, hogy a példában szereplő kis fajlagos ellenállás kontrasztok miatt a perturbációs közelítés konvergenciája gyors.

A 7.13. ábrán az inhomogén régióban mért potenciál relatív szórása látható a mérésnél használt elektródák távolságának függvényében. Látható, hogy az inhomogenitások jellemző méretével skálázható a probléma és a szórás gyorsan elhanyagolhatóvá válik. A relatív szórás az inhomogenitások jellemző méretének 10-12 szeresénél 1 %-ra esik (a vizsgált példánál).



7.13. ábra. A potenciál relatív szórásának csökkenése az elektróda távolsággal. (az egyenletes eloszlású inhomogenitások jellemző mérete 0.1 m)

# Összefoglalás

Az elektromos mérésekből származó fajlagos ellenállás adatoknak alapvető szerepe van a geofizikai interpretációban. Az ellenállás adatok korrekcióit és inverzióját legtöbbször az általánosan elfogadott módon, de gyakran túlságosan leegyszerűsített mérési modell alapján végzik. A doktori értekezésem alapvető célja az elektromos direktfeladat megoldása a valósághoz jobban illeszkedő szonda és közeg modell alkalmazásával, melynek eredményei felhasználhatóak az eddigieknél pontosabb inverzióra is.

1. Forrásmodellként az elektromos szondák modellezésénél gyakran használnak egyszerű pontelektród közelítést. Dolgozatomban a szondamodellt véges hengerelektrodákból építettem fel. Ez a modell lehetővé teszi az elektrodák felületi árameloszlásának számítását, mely – különösen a jelentős közeli fajlagos ellenállás kontrasztok esetében – jelentős hatással van a szonda viselkedésére. Az eredményeket alkalmazva számítottam az egyik legszélesebb körben használt eszköz, az ún. dual-laterolog potenciálterét. Ennél a szondatípusnál a hosszú terelőelektrodák felületén kialakuló árameloszlás jelentősen változik a közegtől függően, meghatározva a szonda viselkedését. Másik alkalmazásként az ún. penetrációs elektromos szonda potenciálterét számítottam, ahol az említett elektroda modellel figyelembe vettem a penetrációs csúcs és a rudazat módosító hatását.
2. A Laplace-egyenlet megoldásával különböző radiális és vertikális ellenállás inhomogenitások esetére számítottam az elektromos szondák környezetében kialakuló potenciálteret. Az elméleti modellezések célja egyrészt az elárasztás hatásának pontosabb figyelembe vétele volt megfelelő radiálisan folytonosan változó fajlagos ellenállás profil választása mellett, összhangban az elárasztás kísérleti tanulmányozására végzett labormérések eredményeivel. Másrészt vizsgáltam az elektromos szondák viselkedését vertikálisan inhomogén, elsősorban folytonosan változó (átmeneti réteg) fajlagos ellenállás viszonyok között. Végül a vizsgálat kiterjedt kisméretű véletlen fajlagos ellenállás inhomogenitások esetére is, amely a véletlen modellhibák hatásának elemzését segíti.
3. A direktfeladat-megoldások eredményeit felhasználva lineáris radiális fajlagos ellenállás profil feltételezésével új típusú ellenállás inverziós módszert dolgoztam ki, ahol az illesztés paraméterei az  $Rt$  és  $Rxo$  mellett az elárasztásprofil meredeksége. Az inverziós eljárással agyag-homokkő sorozatban mért rövid- és hosszú normál szondák mérési eredményeit dolgoztam fel. Az eredményeket összevettem a hagyományos inverzió eredményeivel. Az illesztési hiba csökkenése, mely a modellhiba csökkenéséhez köthető, megerősítette az új módszer alapjául szolgáló feltételezések jogosságát.

## Summary

The resistivity data originated from electrical measurements have a fundamental role in the well log interpretation. The corrections and inversion of apparent resistivities are performed according to the generally accepted procedure, which is sometimes based on an oversimplified measurement model. The basic goal of the dissertation was the elaboration of new direct problem solution on the grounds of improved, more realistic sonde and media model. The results derived from the new method can be used in the improvement of inversion as well.

1. As regards the source model, the modeling of electrical tools is often based on the simple point electrode model. In the dissertation the sonde model was built up with finite cylindrical electrodes. This source model allows of the current distribution calculation on the electrode surface, which may affect the sonde behavior especially in the case of large resistivity contrast. As an application, the widespread used dual-laterolog potential field has been calculated by this model. In the case of laterologs the current distribution of long guard electrodes has an important effect which depends on the measured media. Another application was the potential field calculation of the penetration electric tool, where the cone and shaft modify strongly the potential field.
2. As regards the media model, the potential field and sonde behavior has been examined theoretically in different – radial and vertical - resistivity inhomogenities by the solution of Laplace equation. On the one hand the purpose of this study was more realistic modeling of invasion effect taking into account the results of laboratory measurement regarding to the invasion evolution. On the other hand the sonde behavior has been studied in different vertical inhomogenities first of all in the case of continuous resistivity variation (transient zone). Finally the potential field around small random resistivity inhomogenities has been calculated to study the effect random model error.
3. Using the solutions of direct problem with linear radial resistivity profile assumption new type resistivity inversion was elaborated, which was applied in the case of the short and long normal apparent resistivities. The logs in the field examples were measured in the shale-sandstone series. The results of new inversion were compared to the results of conventional one. The decrement of fitting error (related to the decrement of model error) confirms the grounds of assumption built in measurement model.

## A dolgozatban használt jelölések:

$A(m), B(m)$ : spektrális együttható függvények a potenciál Bessel-Fourier transzformáltjában

$\delta(\cdot)$ : Dirac-delta

$\delta_{i,k}$ : Kronecker-delta

$\delta\sigma(r)$ : A vezetőképesség ingadozását leíró függvény

$\delta U(r)$ : Potenciál ingadozás függvény

$D$ : Az elárasztott zóna átmérője

$d$ : a fúrólyuk átmérője

$Es(m, \dots)$ : A térerősség spektrumának  $m$  térfrekvenciához tartozó spektrális komponense

$\eta$ : az elektróda tartomány ( $z$  változó nem feltétlenül összefüggő tartománya)

$\mathbf{J}(r, z, \varphi)$ : áramsűrűség vektor

$J_0(x)$ : nulladrendű Bessel-függvény

$I_0(x), I_1(x), K_0(x), K_1(x)$ : módosított Bessel-függvények

$L$ : szondahossz

$m$ : térfrekvencia

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ : Green-függvény

$\mathbf{p}$ : modell-paraméterek vektora

$R(\cdot)$ : fajlagos ellenállás

$R_a$ : látszólagos fajlagos ellenállás

$R_i$ : az elárasztott zóna ekvivalens fajlagos ellenállása

$R_m$ : a fúrósiszap fajlagos ellenállása

$R_t$ : a közet fajlagos ellenállása

$r_0$ : a szonda sugara

$\mathfrak{R}(r)$ : a potenciál  $r$  változótól függő tényezője

$\sigma$ : vezetőképesség

$U(r, z, \varphi)$ : a potenciál hengerkoordinátákban

$Vs(m, \dots)$ : a potenciál adott  $m$  térfrekvenciához tartozó spektrális komponense

$Q$ : függvényillesztésnél minimalizálandó funkcionál.

$w$ : a mérési eredmények súlyai az inverzfeladat megoldásnál

$Z(z)$ : a potenciál  $z$  változótól függő tényezője.

$\Pi(r)$ : négyyszög függvény

## Irodalomjegyzék

- Abramovitz, M. and Stegun, I. A. 1965: Handbook of Mathematical Function. Dover edition.
- Allaire, G. and Maillot, H. 2003: H-measures and bounds on the effective properties of composite materials. *Portugaliae Mathematica*, 60:162-191.
- Anderson, B. I. 2001: Modeling and inversion methods for the interpretation of resistivity logging tool response. Ph.D. thesis, Delft University of Technology
- Balázs, L. 2007: Analytic approximation of Green-function in well logging electric direct problem for the case of continuous radial resistivity profile. *Acta geodaetica et geophysica* 42: 309-322
- Balázs, L. 2005: Modelling of cone penetration electric tool field. *Geophysical Transactions*, 45: 19-36.
- Balázs, L. 2008: Modelling and examination of penetration neutron sonde behaviour in various logging environments by Monte-Carlo method, and diffusion approximation. *Geophysical Transactions*, 45:135-156;
- Balázs, L. és Kovács, Gy. 1989:Olajipari szondák kiértékelő diagrammjai. MOL-SZKFI Kutatási jelentés.
- Balázs, L. 1987: Nyújtott elektródás laterologok terének modellezése. Elektrokarotázs módszerek, szemináriumi jegyzet: 667-672, Siófok.
- Balázs, L. 2008: Az elárasztott zóna radiális ellenállás profiljának hatása a karotázs elektromos szelvények inverziós eredményeire. Inerziós Ankét, Miskolc.
- Chen, Y. H. and Chew, W. C. 1988: A novel array laterolog method. *The Log Analyst*, 39: 22-33.
- Chemali, R. and Gianzero, S. 1988: The dual laterolog in common complex situation. *Well Log Analyst Symposium*, San Antonio, Transaction: N1-N25.
- Cozzolino, K. and Silva J.C. 2007: Synthetic focusing and simulation of dual laterolog tool in axisymmetric subsurface models. *Journal of Applied Geophysics*, 61: 102-110.
- Dakhnov, V. N. 1967: Elektricszeskie u magnitnie metodi iszledovanija szkvazsin.: 99-200, Moszkva
- Daniels, J. J. 1987: Interpretation of buried electrode resistivity data using a layered earth model. *Geophysics*, 43: 988-1001.
- Davies, B. 1983: Integráltranszformációk és alkalmazásaik. Műszaki Könyvkiadó.
- Davydycheva, S and Druskin, V. 2003: An efficient finite-difference scheme for electromagnetic logging in 3D anisotropic inhomogenous media. *Geophysics*, 68: 1525-1536.

- De-Witte, L. and Gould, R. W. 1959: Potential distribution due to a cylindrical electrode mounted on an insulating probe. *Geophysics XXIV*, 3: 566-579.
- Doll, H. G. 1951; The laterolog: a new resistivity logging method with electrodes using an automatic focusing system. *Petroleum Transactions, AIME* 192: 305-316.
- Drahos, D. 1984: Electrical modeling of the inhomogeneous invaded zone. *Geophysics*, 49: 1580-1585.
- Gianzero, S. and Anderson, B. 1982: An integral transform solution to the fundamental problem in resistivity logging. *Geophysics*, 47: 946-956.
- Goncalves, M. I. C. 2002: Resistivity Well Logging. GIMMC Workshop.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. 1962: On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 10: 335-342.
- Jackson, J. D. 2004: Klasszikus elektrodinamika. Typotex, Budapest.
- Jiao, D. and Sharma, M. 1992: An Experimental Investigation of the Resistivity Profile in the Flushed Zone. *The Log Analyst*, March-April:145-154.
- Landau, L.D. and Lifschitz, E.M.1986: Elméleti fizika VIII. Folytonos közegek elektrodinamikája. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Liu, H. Q. and Anderson, B. I. 1994: Modeling low-frequency electrode.type resistivity tools in invaded thin beds. *IEEE Transactions on Geoscience*, 33: 494-498.
- Liu, Z. and Oyang, J. 1999; Dynamic dual-laterolog responses: model and field applications in the Bohai Gulf of China. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 23: 1-11.
- Lovell, J. R. 1993: Finite element method in resistivity logging. Ph.D. thesis, Delft University of Technology.
- Mises, R.V. 1966: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Nam, J. M. 2004: Self-adaptive HP finite-element simulation of dual-laterolog measurements in dipping, invaded, and anisotropic formation. University of Texas at Austin.
- Pardo, D. 2008; Fourier series expansion in a non orthogonal system of coordinates for symulation of 3D DC borehole resistivity measurements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197: 1906-1925.
- Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. 1995: Handbook of exact solution for ordinary differential equations. CRC Press, New York.
- Pyeon, C. H. 2000: Higher order perturbation calculation with higher mode eigenfunctions in homogeneous system. *Annals of nuclear energy*, 27: 1227-1235.



Roy, K. K. and Dutta, D. J. 1994: Borehole dc resistivity response for transitional invaded zone. *Geophysics*, 59 : 1796-1805.

Rózsa, P. 1991, *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Tankönyvkiadó, Budapest.

Simonyi, K. 1960: *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Szatmáry, Z. 2002: *Mérések kiértékelése*, Egyetemi jegyzet, MEK-00862.

Teodorovich, E. V. 2002: An improved perturbation theory method for describing the effective permeability of a randomly heterogeneous medium. *J. Applied Maths Mechs.*, 66: 439-446.

Tikhonov, A. N, 1963: Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dokl.*, 4: 1035-1038; English translation of *Dokl Akad Nauk SSSR* (1963)151: 501-504.

Vlagyimirov, A. Sz. 1979: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Yang, W. 2007: Interpretation of frequency-dependent dual-laterolog measurements acquired in middle-east carbonate reservoirs using second-order finite element method. *SPWLA 48-th Annual Logging Symposium*, June 3-6.

Wang, H. and Yang S. 2002: A multiparameter iterative inversion of dual-laterolog in horizontally layered media and its error analysis. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 40: 482-490.

Wang, T. 2004: Finite difference modeling of electromagnetic tool response for logging while drilling. *Geophysics*, 69: 152-160.

Woznicka, U. 1981: Solution of the thermal neutron diffusion equation for a two-region system by perturbation calculation. *Journal of Applied Physics D*, 14: 1167-82.

## Köszönetnyilvánítás

Nagyon köszönöm konzulensemnek, Dr. Drahos Dezsőnek segítségét, hasznos tanácsait és türelmét, Dr. Horváth Ferenc tanszékvezetőnek ösztönzését és támogatását, Dr. Szatmáry Zoltánnak, akitől korábbi évek közös munkái során rengeteget tanultam.

## I. Függelék:

### A radiálisan lineáris fajlagos ellenálláshoz kapcsolódó probléma megoldása Frobenius-módszerrel

Változó fajlagos ellenállás esetén a potenciál radiális komponensére ( $\Re$ ) az alábbi differenciálegyenlet írható fel [Roy, 1994]:

$$\frac{d^2\Re}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Re}{dr} - \frac{1}{R_i} \frac{dR_i}{dr} \frac{d\Re}{dr} - m^2\Re = 0, \quad (I.1.)$$

Az egyenlet megoldását a szerzők nem közlik. A megoldást keressük polinom alakban:

$$\Re(r) = r^s \sum_{i=0}^N a_i r^i. \quad (I.2.a.)$$

Ennek első deriváltja:

$$\frac{d\Re}{dr} = \sum_{i=0}^N a_i (i+s) r^{i+s-1}, \quad (I.2.b.)$$

második deriváltja:

$$\frac{d^2\Re}{dr^2} = \sum_{i=0}^N a_i (i+s)(i+s-1) r^{i+s-2}. \quad (I.2.c.)$$

Az ellenállásprofil legyen:

$$R_i(r) = Ar + B. \quad (I.3.)$$

Ezt I.1 egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{d^2\Re}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Re}{dr} - \frac{A}{Ar+B} \frac{d\Re}{dr} - m^2\Re = 0 \quad (I.4.a.)$$

Átalakítva:

$$(Ar^2 + Br) \frac{d^2\Re}{dr^2} + (Ar+B) \frac{d\Re}{dr} - Ar \frac{d\Re}{dr} - (Ar^2 + Br) m^2\Re = 0. \quad (I.4.b.)$$

Összevonások után:

$$(Ar^2 + Br) \frac{d^2\Re}{dr^2} + B \frac{d\Re}{dr} - (Ar^2 + Br) m^2\Re = 0. \quad (I.4.c.)$$

Behelyettesítve I.4.c-be I.2.a, I.2.b. és I.2.c. összefüggést:

$$\begin{aligned} & (Ar^2 + Br) \sum_{i=0}^N a_i (i+s)(i+s-1) r^{i+s-2} + B \sum_{i=0}^N a_i (i+s) r^{i+s-1} - \\ & - (Ar^2 + Br) m^2 \sum_{i=0}^N a_i r^{i+s} = 0 \end{aligned} \quad (I.4.d.)$$

Összevonások után:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N a_i A(i+s)(i+s-1) r^{i+s} + \sum_{i=0}^N a_i B(i+s)(i+s-1) r^{i+s-1} + \sum_{i=0}^N a_i B(i+s) r^{i+s-1} - \\ & - \sum_{i=0}^N a_i A m^2 r^{i+s+2} - \sum_{i=0}^N a_i B m^2 r^{i+s+1} = 0 \end{aligned} \quad (I.4.e.)$$

Átrendezve, úgy hogy  $r$  megfelelő hatványainak együtthatói összevonhatók legyenek:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N a_i A(i+s)(i+s-1) r^{i+s} + \sum_{i=0}^N a_i B(i+s)^2 r^{i+s-1} - \\ & - \sum_{i=0}^N a_i A m^2 r^{i+s+2} - \sum_{i=0}^N a_i B m^2 r^{i+s+1} = 0 \end{aligned} \quad (I.4.f.)$$

$$\begin{aligned} & a_0 B s^2 r^{s-1} + a_1 B(1+s)^2 r^s + a_0 A s(s-1) r^s + a_2 B(2+s)^2 r^{s+1} + \sum_{i=2}^N a_{i+1} B(i+s+1)^2 r^{i+s} + \\ & + \sum_{i=0}^N a_i A(i+s)(i+s-1) r^{i+s} - \sum_{i=2}^N a_{i-2} A m^2 r^{i+s} - \sum_{i=1}^N a_{i-1} B m^2 r^{i+s} = 0 \end{aligned} \quad (I.4.g.)$$

$$\begin{aligned} & a_0 B s^2 r^{s-1} + a_1 B(1+s)^2 r^s + a_2 B(2+s)^2 r^{s+1} + a_0 A s(s-1) r^s + a_1 A(s+1) s r^{s+1} - \\ & - a_0 B m^2 r^{s+1} + \sum_{i=2}^N a_{i+1} B(i+s+1)^2 r^{i+s} + \\ & + \sum_{i=2}^N a_i A(i+s)(i+s-1) r^{i+s} - \sum_{i=2}^N a_{i-2} A m^2 r^{i+s} - \sum_{i=2}^N a_{i-1} B m^2 r^{i+s} = 0 \end{aligned} \quad (I.4.h.)$$

Ha  $a_0$  együtthatóról feltesszük, hogy nem lehet zérus, akkor az  $r^{(s-1)}$  együtthatója csak akkor zérus, ha  $s$  zérus, és  $a_1$  szintén zérus. Továbbá:

$$a_2 B 4 - a_0 B m^2 = 0. \quad (I.5.)$$

Innen:

$$a_2 = a_0 \frac{m^2}{4} \quad (I.6.)$$

A közös szumma mögötti együtthatókból az alábbi egyenletek származtathatók egy ötöd fokú polinommal leírható megoldáshoz:

$$-a_{i-2}Am^2 - a_{i-1}Bm^2 + a_i Ai(i-1) + a_{i+1}B(i+1)^2 = 0, \quad (1.7.a.)$$

$$a_3 = \frac{a_0 Am^2 - 2a_2 A}{9B} = a_0 m^2 \frac{A}{9B} - a_0 m^2 \frac{A}{B}, \quad (1.7.b.)$$

$$a_4 = \frac{Bm^2 a_2 - 6Aa_3}{16B} = a_0 m^4 \frac{1}{64} - a_0 m^2 \frac{A^2}{16B}, \quad (1.7.c.)$$

$$a_5 = \frac{Am^2 a_2 + Bm^2 a_3 - a_4 12A}{25B}. \quad (1.7.d.)$$

Magasabb rendű közelítéshez folytatható a rekurzió.

Megjegyzendő továbbá, hogy a fenti megoldástól lineárisan független megoldás előállítható, ha  $a_0$  együtthatót zérusnak választjuk, ekkor  $s = -1$  választással  $a_1$  együttható különbözni fog zérustól és a további együtthatók meghatározásához szükséges rekurzió kiinduló eleme lesz. A két lineárisan független megoldással teljesíthető a másodrendű differenciálegyenlethez (I.1.) kapcsolódó két peremfeltétel.

## II. Fűggelék.

### Geometriai faktor származtatása 5.36. egyenletből

Radiális fajlagos ellenállás változást, perturbációnak felfogva a homogén fajlagos ellenállás eloszláshoz képest, 5.36. egyenletből geometriai-faktor jellegű közelítés vezethető le. Az együtthatók megváltozására vonatkozó egyenletben az áramsűrűsége spektrális elemére vonatkozó részbe  $A_0$  és  $B_0$  kerül, mely homogén referencia közeg esetén tovább egyszerűsödik és csak  $A_0$  homogén térbeli értékének függvénye lesz:

$$A_{0h} = \frac{R_0}{2\pi^2 m r_0 K_1(m r_0)} . \quad (\text{II.1.})$$

Így  $B(m)$  megváltozására vonatkozó egyenlet ekkor:

$$\frac{dB}{dr} = -m r K_0(m r) \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} A_{0h} K_1(m r) . \quad (\text{II.2.})$$

Innen  $B_0(m)$ :

$$B_0(m) = A_{0h} \int_{r_0}^{r_1} m r K_0(m r) \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} K_1(m r) dr . \quad (\text{II.3.})$$

Így  $A_0(m)$ :

$$A_0(m) = A_{0h} + \frac{I_1(m r_0)}{K_1(m r_0)} B_0 . \quad (\text{II.4.})$$

Ebből a potenciál a Wronski-determináns felhasználásával:

$$U(r, z) = U_h + \int_0^\infty A_{0h} \frac{\cos m z}{K_1(m r_0) m r_0} \int_{r_0}^{r_1} m r K_0(m r) \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} K_1(m r) dr dm . \quad (\text{II.5.})$$

II.5. egyenletben látható, hogy a fajlagos ellenállás megváltozása az  $r$  függvényében milyen súlyt kap. A pszeudogeometriai függvény:

$$PGF(r) = \int_0^\infty \frac{A_{0h}}{K_1(m r_0)} \frac{r}{r_0} K_0(m r) K_1(m r) \cos m z dm . \quad (\text{II.6.})$$